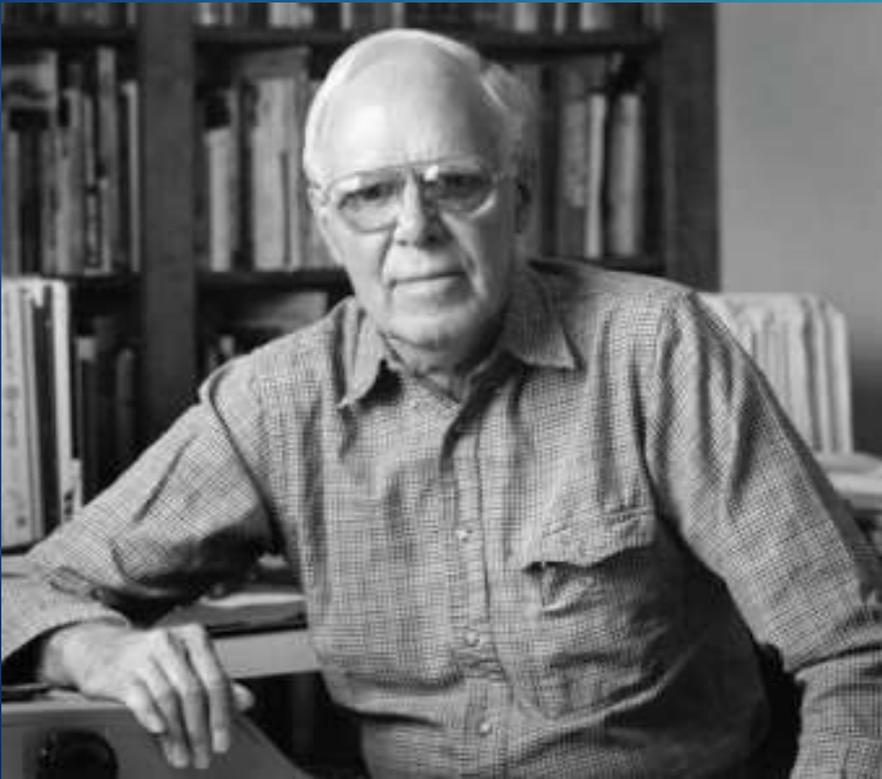
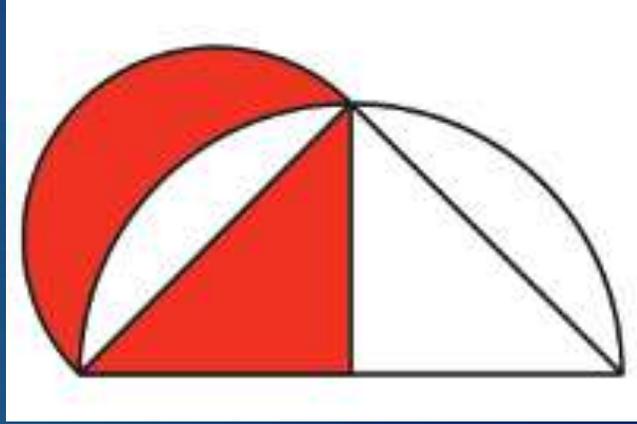


Una passeggiata matematica nei lavori Martin Gardner



Paolo Giangrandi

ISIS A. Malignani – Udine
Giovedì 11 dicembre 2014

Martin Gardner (Tulsa, 1914 – Norman, 2010, Stati Uniti) è stato un **matematico, illusionista e divulgatore scientifico**, con vari interessi che spaziavano dalla filosofia allo scetticismo scientifico.

Contrariamente a quanto si potrebbe pensare, Martin Gardner non ha compiuto studi di carattere scientifico: è laureato in **Filosofia** (1936). La sua cultura matematica è completamente autodidatta e trae origine dalla passione per i giochi di prestigio, che coltiva fin da bambino.



Per molti anni ha curato la rubrica "Mathematical Games" sulla rivista **Scientific American** (la cui versione italiana era "Giochi Matematici", pubblicata su **Le Scienze**, a partire dal 1968).

È stato autore di oltre 65 libri e di innumerevoli articoli nel campo della matematica, scienza, filosofia, letteratura.

Nella rubrica "Mathematical Games" (tenuta dal 1956 al 1981) ha divulgato molti argomenti di carattere matematico, come:

- ▶ Gli Esaflexagoni
- ▶ Il Gioco della Vita di John Horton Conway
- ▶ I Polimini
- ▶ Il Cubo Soma
- ▶ Il gioco dell'"Hex", creato indipendentemente da Piet Hein e John Forbes Nash
- ▶ Il Tangram
- ▶ Gli origami
- ▶ I labirinti
- ▶ Le tassellazioni del piano
- ▶ I frattali
- ▶ La crittografia

In Italia diventa noto con i mitici «Giochi matematici» su *Le Scienze*



GIOCHI MATEMATICI

di Martin Gardner

Le passeggiate a caso e i loro equivalenti nei giochi d'azzardo

Cavalcava tranquillo lasciando libero il suo cavallo di andare dove voleva perché pensava che proprio questo costituisse la vera essenza dell'avventura.

(Cervantes, *Don Chisciotte*)

Il vagabondo che si aggira senza meta di città in città è probabilmente un nevrotico, ma anche la persona più sana ha bisogno di comportarsi di tanto in tanto in maniera casuale. Camminare a caso per la strada è

Markov, che a sua volta è uno degli aspetti più interessanti della moderna teoria della probabilità, per via della sua crescente applicazione nei vari settori della scienza.

Una catena di Markov (così chiamata dal nome del matematico russo A.A. Markov che per primo la ha studiata) è un sistema di « stati » discreti in cui la transizione da uno stato a un qualsiasi altro stato è una probabilità fissa che non è influenzata dalla storia passata del sistema. Uno dei più semplici

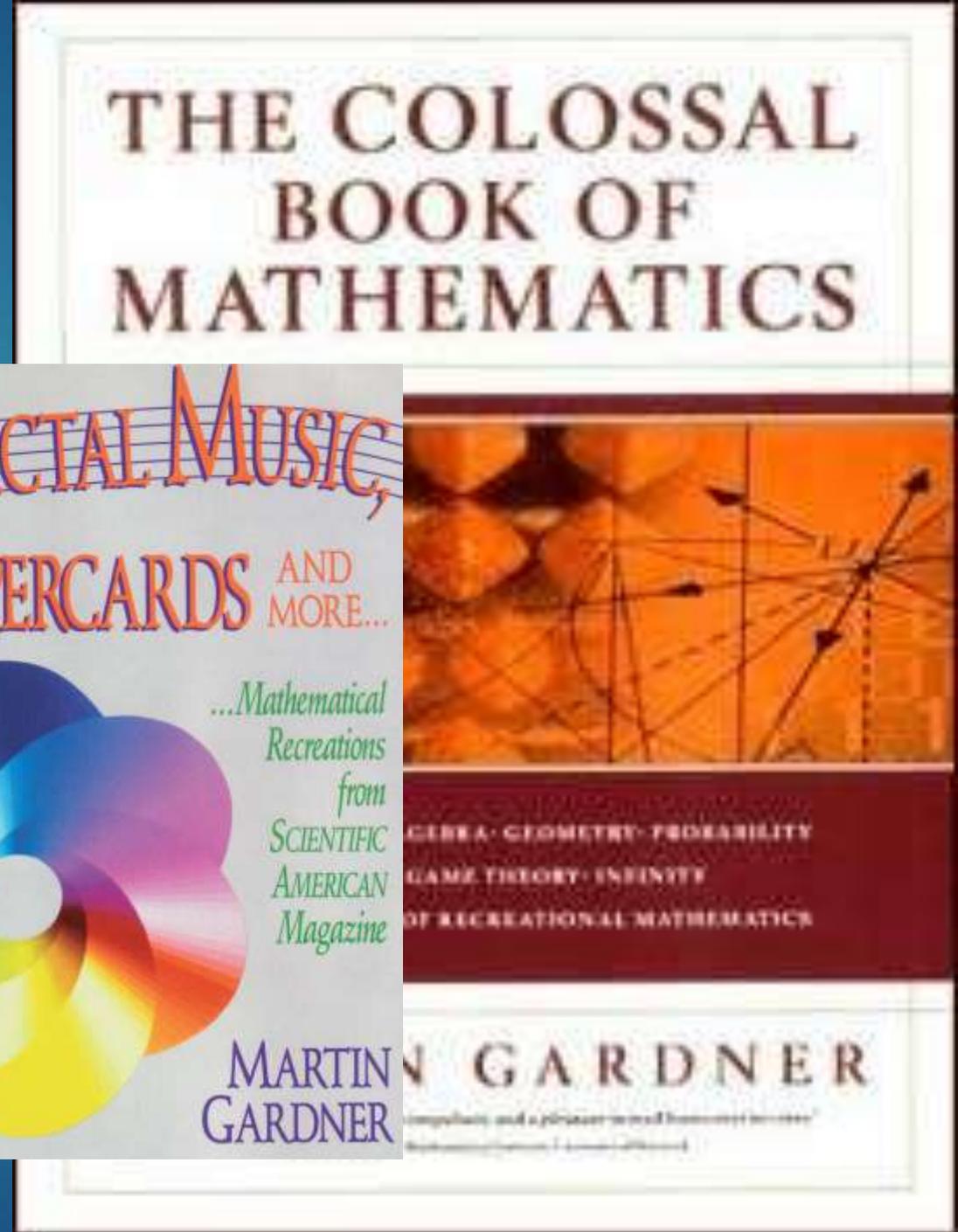
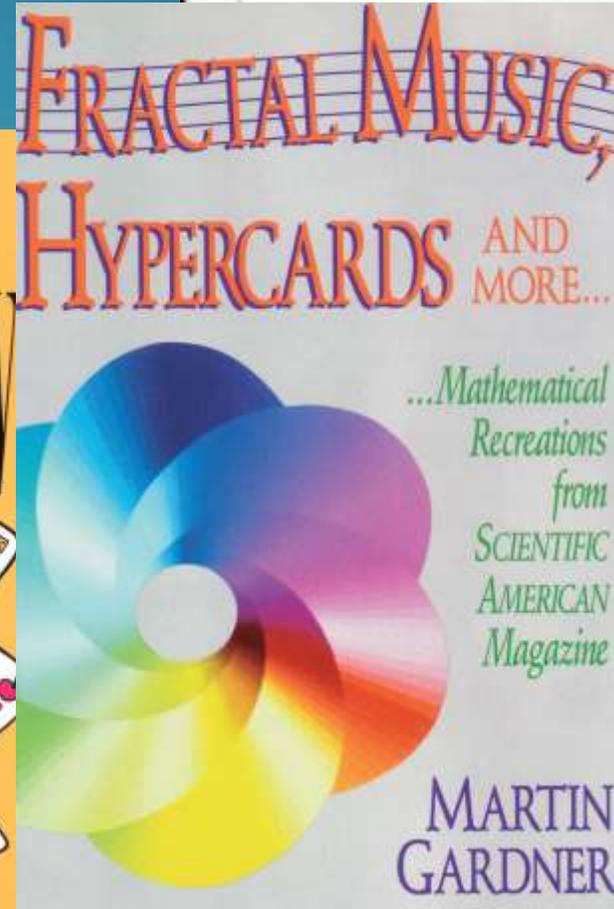
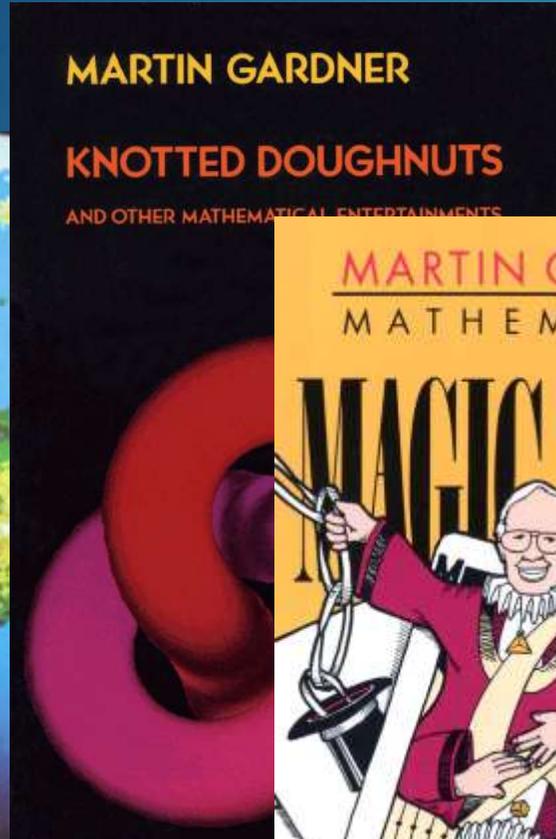
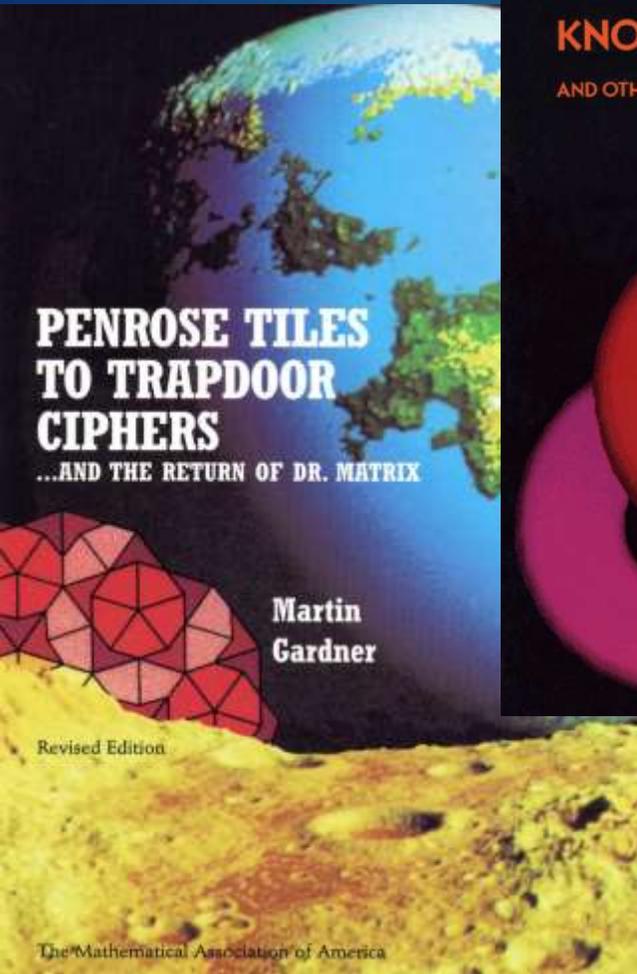
sico problema sul gioco d'azzardo, il problema della « rovina del giocatore ». Il giocatore *A* inizia con 7 lire, il giocatore *B* con 10. Entrambi lanciano a turno una moneta: se viene testa *B* dà ad *A* 1 lira, mentre se viene croce *A* dà 1 lira a *B*. Il gioco finisce quando uno dei due giocatori è in « rovina », cioè quando ha finito il suo capitale iniziale. È semplice intuire la corrispondenza tra il procedere del gioco e i movimenti del viandante. In ogni istante, il capitale di *A* in lire corrisponde alla distanza del viandante dalla barriera *A* mentre quello di *B* corrisponde alla sua distanza dalla barriera *B*. Se i primi due lanci danno entrambi testa, il viandante muove due passi verso destra; nel caso del gioco, *A* aumenta il suo capitale da 7 a 9 lire, mentre *B* diminuisce il suo da 10 a 8 lire. Quando il viandante urta la barriera *A* si ha la rovina del giocatore *A*; si ha invece la rovina del giocatore *B* se l'urto avviene contro la barriera *B*.

Tutti i problemi di probabilità hanno identica risposta in entrambe le interpretazioni: alcuni sono facili da risolvere, altri sono più difficili. Uno dei più semplici è il seguente: qual è la probabilità di vittoria di ciascun giocatore? La risposta a questa domanda è

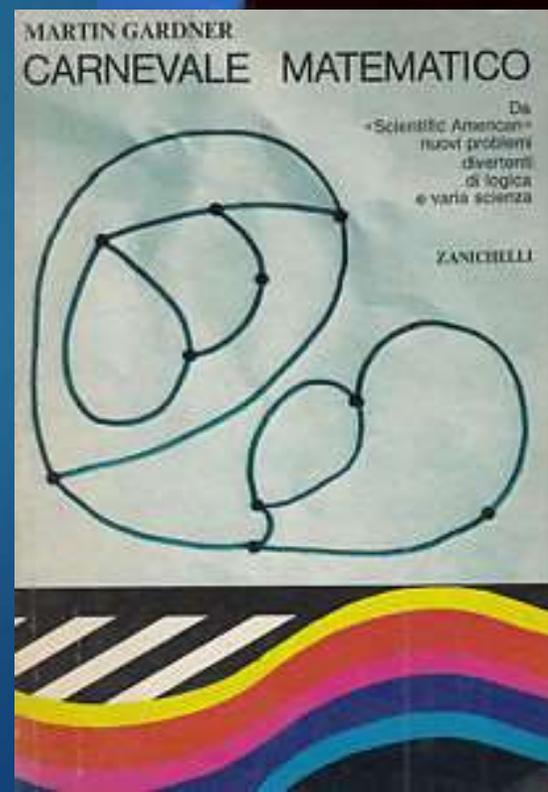
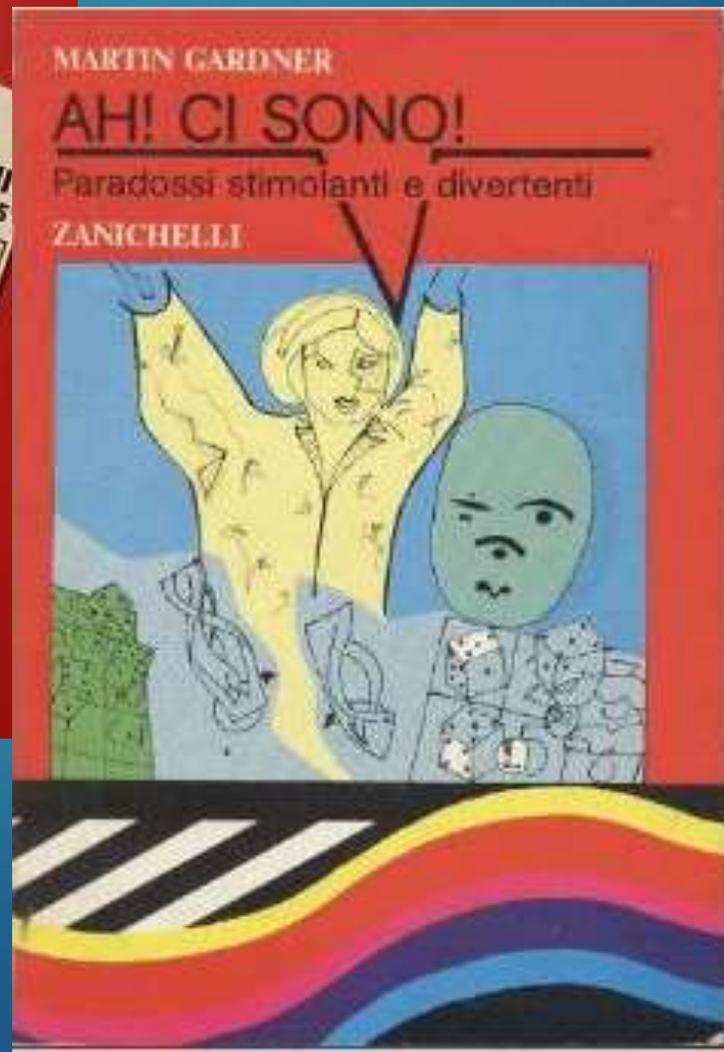
Martin Gardner ha inoltre fatto conoscere al grande pubblico le opere di coloro che hanno più contribuito alla matematica ricreativa o artistica, fra cui:

- ▶ Piet Hein
- ▶ Sam Loyd
- ▶ Henry Dudeney
- ▶ Lewis Carroll
- ▶ Robert Abbott
- ▶ Maurits Cornelis Escher
- ▶ Douglas Hofstadter
- ▶ Raymond Smullyan

Tanti sono i libri di Martin Gardner



In Italia, meno...



Perché ricordare Martin Gardner?

- Gardner non solo è stato un ottimo divulgatore: ha saputo coniugare egregiamente divertimento, bellezza e «serietà» delle idee matematiche.
- Ha saputo divulgare matematica facendo capire la matematica e facendo ragionare i lettori.
- Ha saputo stimolare i lettori con numerosi problemi matematici su una varietà incredibili di temi senza annoiarli.
- Ha saputo coniugare chiarezza e semplicità di linguaggio con il rigore richiesto della matematica.

Perché ricordare Martin Gardner?

Un ricordo personale dei tempi del liceo:

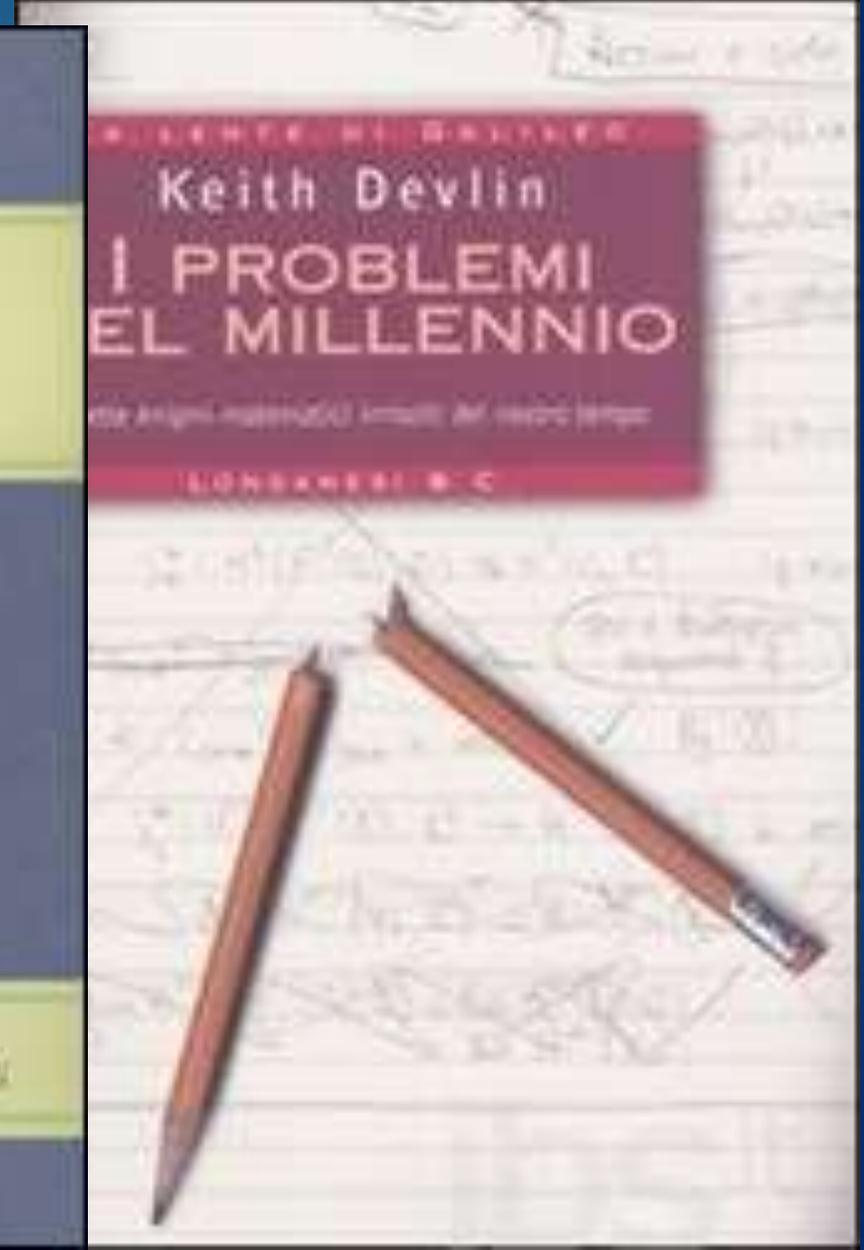
Mi ha fatto capire che la matematica non comprendeva solo l'algebra e la geometria che si apprendono a scuola, ma la matematica costituisce un mondo vastissimo e variegato dalle mille applicazioni e dai concetti che si diramano in tutte le direzioni: è il regno della fantasia!

Modi diversi di fare divulgazione...

- ▶ Alla «SuperQuark»



Libri divulgativi di matematica



Modi diversi di fare divulgazione...

- Semplice raccolta di problemi e rompicapi

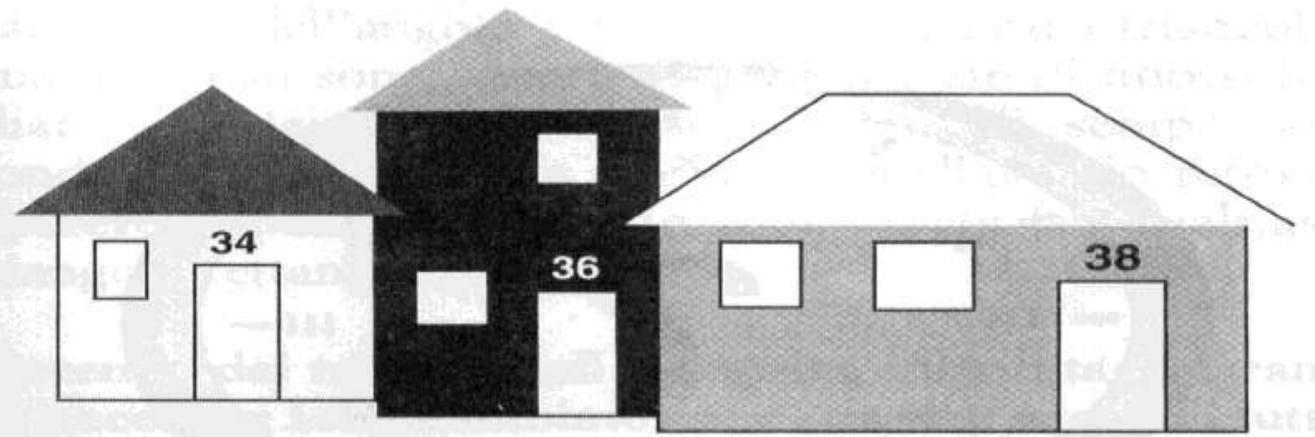


13. Tre amici

Tre amici abitano in tre case vicine, nella stessa via, ai numeri 34, 36, 38.

Hanno capelli di colore diverso e anche i loro passatempi preferiti sono diversi. L'amico con i capelli castani è appassionato di nuoto subacqueo. La casa il cui numero è divisibile per 4 è abitata dall'amico biondo. L'appassionato di calcio è contento di abitare in una casa il cui numero ha come somma delle sue cifre il numero di giocatori di una squadra del suo sport preferito.

Qual è il numero della casa in cui abita l'appassionato di musica?



Modi diversi di fare divulgazione...

► Alla «Martin Gardner»

Tema:
argomento
classico, o
insolito (per il
mondo
scolastico)

IL TEOREMA DELLA MAPPA A QUATTRO COLORI

Fra tutte le grandi ipotesi matematiche ancora indimostrate, la più semplice — semplice nel senso che anche un bambino può capirla — è il famoso teorema topologico dei quattro colori. Quanti sono i colori necessari per colorare una qualsiasi mappa in modo che due regioni con un confine in comune non abbiano lo stesso colore? È facile costruire mappe che richiedono quattro colori e basta solo una conoscenza di matematica elementare per seguire una dimostrazione rigorosa che cinque colori sono sufficienti. Ma sono i quattro colori necessari e sufficienti? Per dirla con altre parole, è possibile costruire una mappa che richieda necessariamente cinque colori? I matematici

Ogni pochi mesi ricevo per posta una lunga « dimostrazione » del teorema dei quattro colori. In quasi tutti i casi risulta che il mittente ha confuso il teorema con uno molto più semplice che dice che è impossibile disegnare una mappa di cinque regioni in modo che ogni regione sia adiacente alle altre quattro. (Due regioni che hanno un solo punto di contatto non sono considerate adiacenti). Io stesso una volta ho portato un piccolo contributo a questa confusione scrivendo un racconto di fantascienza intitolato « L'isola dei cinque colori », su un'isola immaginaria divisa da un topologo polacco in cinque zone che avevano tutte dei confini in comune. Non è difficile provare che una mappa di questo tipo non può essere disegnata. Si potrebbe supporre che il teorema dei quattro colori ne sia una conseguenza automatica, ma non è così.

Per vedere il perché, consideriamo la semplice mappa in fig. 43 *a*. (Le forme reali delle regioni non hanno importanza; ha importanza solo in che modo sono connesse. Il teorema dei quattro colori è topologico proprio perché esso si articola su una proprietà delle figure piane che rimane inalterata distorcendo la superficie sulla quale sono tracciate). Che colore dobbiamo usare per la zona bianca? Ovviamente deve essere marrone o un quarto colore. Supponiamo di scegliere la seconda alternativa e sia il colore mostrato in *b* nella fig. 43. Aggiungiamo poi un'altra regione. È ora impossibile completare la

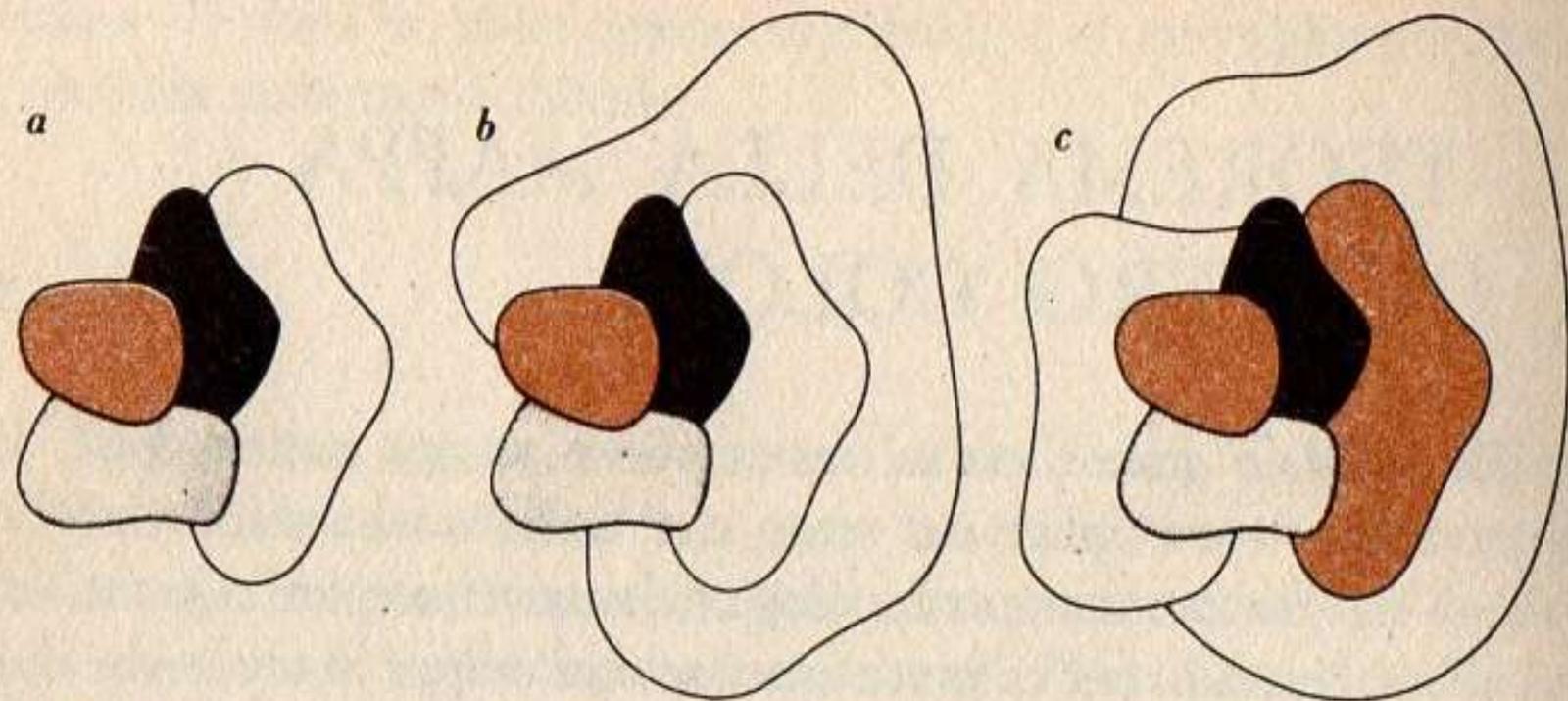


Fig. 43. Nel costruire una mappa con quattro colori è spesso necessario ricominciare con colori diversi.

carta senza usare un quinto colore. Ritorniamo, allora, alla posizione *a* e invece di mettere il rosa nella regione bianca, usiamo il marrone. Ma questo ci mette in difficoltà se ci sono altre due regioni che toccano le prime quattro, come mostrato in *c*. È chiaro che un quarto e quinto colore sono necessari per le due aree bianche. Tutto questo prova forse che per certe mappe sono necessari cinque colori? Niente affatto. In entrambi i casi possiamo farcela con quattro colori, ma solo tornando indietro e cambiando il precedente schema di colori.

Nella colorazione di mappe complicate, con dozzine di regioni, ci si trova costantemente a correre in vicoli ciechi di questo tipo che obbligano a ritornare sui propri passi. Per dimostrare il teorema dei quattro colori, perciò, bisogna mostrare che un simile cambiamento può esser fatto in tutti i casi con esito positivo, o individuare un procedimento che elimini tutte queste alterazioni nel processo di colorazione di una qualsiasi mappa con quattro colori. Stephen Barr ha suggerito un delizioso gioco topologico a due persone basato sulla difficoltà di prevedere questi vicoli ciechi coloristici. Il giocatore A disegna una regione. Il giocatore B la colora e aggiunge un'altra regione nuova. Il giocatore A colora la nuova regione e ne aggiunge una terza. Si continua così ed ogni giocatore colora l'ultima regione disegnata dal suo avversario, finché uno dei due perde per esser stato obbligato ad usare un quinto colore. Non conosco modo più rapido per constatare le difficoltà che intervengono nella dimostrazione del teorema dei quattro colori che mettersi a giocare questo curioso gioco.

Vien detto spesso che i cartografi furono i primi ad accorgersi che non occorrono più di quattro colori per qualsiasi mappa, ma que-

Riferimenti
storici

sto è stato messo in dubbio da Kenneth O. May, un matematico del Carleton College. Dopo ampie ricerche sull'origine del teorema dei quattro colori, May non riuscì a trovare alcuna enunciazione del teorema sugli antichi libri di cartografia, o alcuna indicazione che il teorema fosse conosciuto. Sembra che sia stato formulato per la prima volta esplicitamente da Francis Guthrie, studente ad Edimburgo. Egli lo citò a suo fratello Frederick (che in seguito divenne un chimico), e Frederick a sua volta lo trasmise, nel 1852, al suo insegnante di matematica, Augustus de Morgan. L'ipotesi divenne molto nota dopo che il grande Arthur Cayley ammise nel 1878 che egli aveva lavorato al teorema ma non era stato capace di dimostrarlo.

Nel 1879 l'avvocato e matematico Sir Alfred Kempe pubblicò quella che egli credeva una dimostrazione e un anno dopo scrisse sulla rivista inglese *Nature* un articolo dal titolo fiducioso « Come colorare una mappa con quattro colori ». Per dieci anni i matematici pensarono che il problema fosse sistemato; poi P. J. Heawood scoprì un fatale difetto nella dimostrazione di Kempe. D'allora in poi i più fini cervelli matematici hanno affrontato senza successo il problema. L'aspetto provocante del teorema è che esso sembra facilissimo da dimostrare. Nel suo volume autobiografico *Ex-prodigy*, Norbert Wiener scrive di aver provato, come tutti i matematici, a trovare una dimostrazione del teorema dei quattro colori, solo per vedere la sua dimostrazione « sbriciolarsi », secondo la sua espressione. Allo stato attuale delle cose, il teorema è stato dimostrato vero per tutte le mappe con non più di 38 regioni. Può sembrare che questo sia un numero piccolo, ma esso diviene meno comune se si pensa che il numero di mappe topologicamente diverse aventi 38 o meno regioni sarebbe oltre 10^{38} . Anche un moderno calcolatore elettronico non sarebbe capace di esaminare tutte queste configurazioni in un ragionevole lasso di tempo.

Riferimenti
storici

La mancanza di una dimostrazione del teorema dei quattro colori è resa ancor più esasperante dal fatto che sono state trovate analoghe dimostrazioni per superfici assai più complicate del piano. (La superficie di una sfera, fra l'altro, è equivalente al piano, per quanto concerne il problema; qualsiasi mappa sulla sfera può essere trasformata in una mappa piana equivalente tagliando la carta sferica in un punto interno di una regione qualsiasi e poi spianando la superficie). Su una superficie ad una faccia come la striscia di Möbius, la bottiglia di Klein ed il piano proiettivo è stato stabilito che sei colori sono

necessari e sufficienti. Sulla superficie di un toro, il numero è di sette. Una mappa del genere è mostrata in fig. 44. Notare che ogni regione è delimitata da sei segmenti di curva e che ogni regione è adiacente alle altre sei. In effetti, il problema della colorazione di una mappa è stato risolto per ogni superficie di ordine superiore che sia stata esaminata seriamente.

È solo quando il teorema viene applicato alle superfici topologicamente equivalenti al piano o alla superficie della sfera che la sua dimostrazione continua a sfuggire ai topologi; e ciò che è peggio, non c'è alcuna ragione apparente perché debba essere così. Sembra opera di spiriti il modo con cui i tentativi di dimostrazione sembrano funzionare magnificamente, solo per presentare delle lacune irritanti proprio quando la catena deduttiva sta per essere completata. Nessuno può predire cosa il futuro deciderà su questo famoso problema, ma possiamo esser certi che la prima persona, che riuscirà a sfondare uno dei tre possibili sbarramenti, acquisterà fama in tutto il mondo.

1. Scoprire una mappa che richieda cinque colori. « Se fossi così audace da fare una ipotesi », scrive H. S. M. Coxeter nel suo eccellente articolo « Il problema dei quattro colori, 1840-1890 », « penserei che una mappa che richiede cinque colori può esser possibile, ma che la più piccola mappa del genere avrebbe tante facce (forse centinaia o migliaia) che nessuno, di fronte ad essa, avrebbe la pazienza di fare tutte le prove necessarie richieste per escludere la possibilità di colorarla con quattro colori ».

2. Trovare una dimostrazione del teorema, possibilmente con una tecnica nuova che possa improvvisamente aprire molte altre porte matematiche sbarrate.

3. Dimostrare che il teorema non è dimostrabile. Ciò può sembrare strano, ma nel 1931 Kurt Gödel stabilì che in ogni sistema deduttivo abbastanza complicato per includere l'aritmetica, vi sono teoremi matematici che sono « indecidibili » nell'interno del sistema stesso. Sinora pochissime delle grandi congetture insolute della matematica si sono dimostrate indecidibili in questo senso. Il teorema dei quattro colori è un teorema del genere? Se è così, esso può essere accettato come « vero » solo adottandolo, o adottando qualche altro teorema indecidibile strettamente collegatogli, come postulato nuovo e indimostrabile di un sistema deduttivo ampliato.

Sfortunatamente la dimostrazione che cinque colori sono sufficienti per le mappe piane, o che sei o più colori sono necessari e suffi-

Riflessioni «alte»

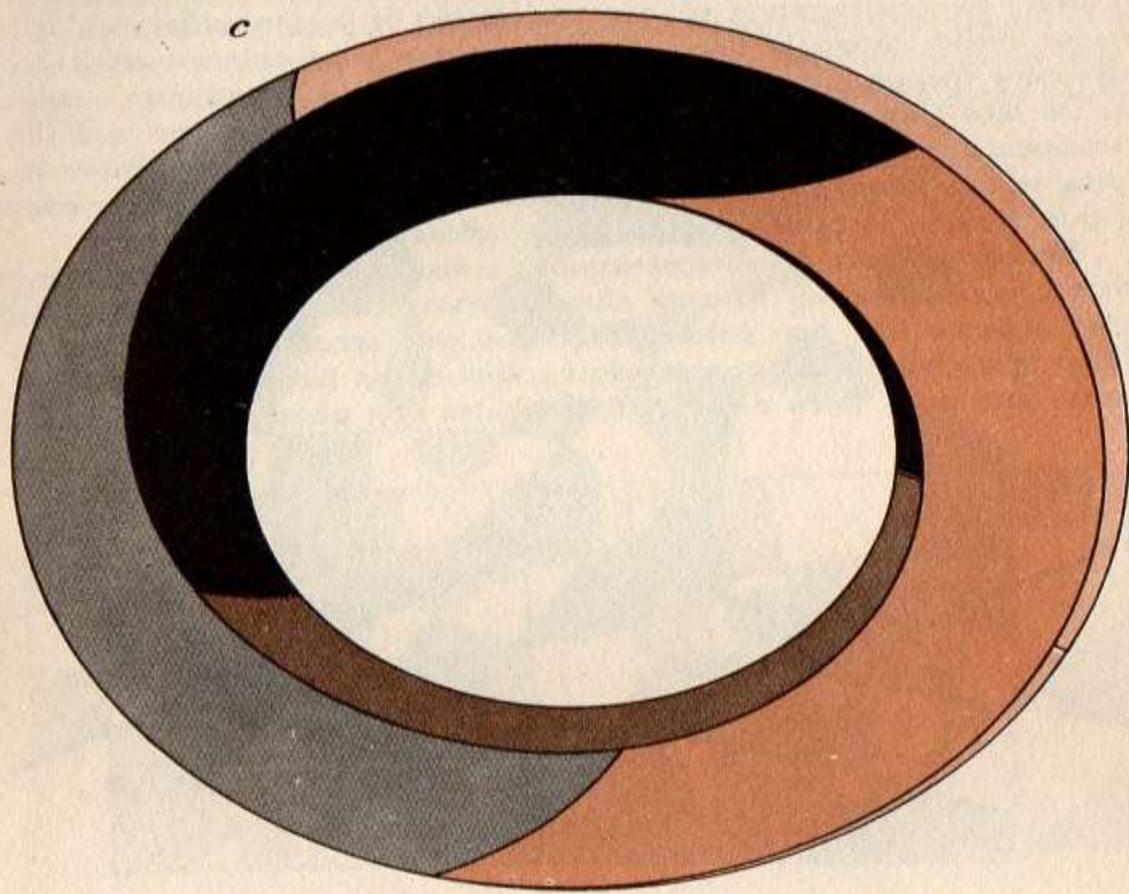
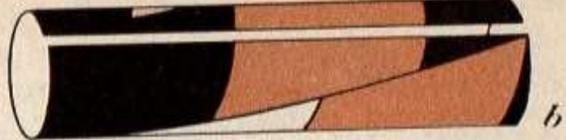
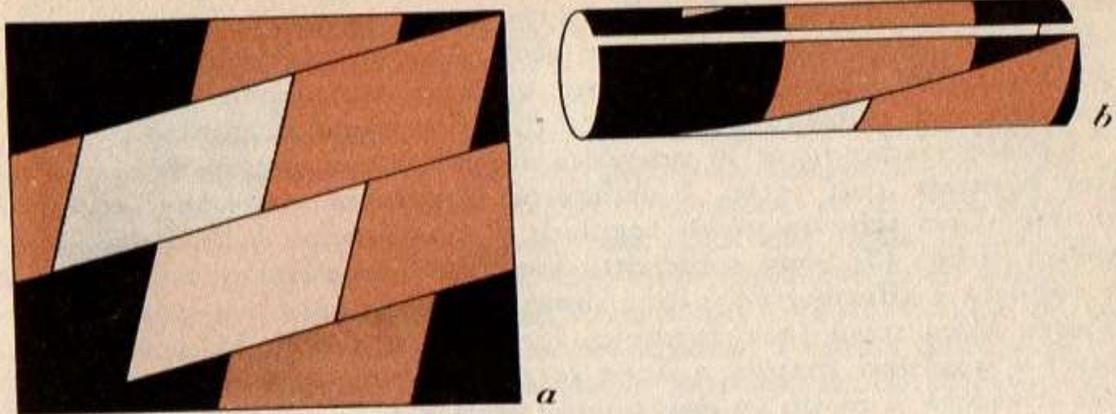


Fig. 44. Sette colori bastano a fare una mappa su una superficie torica (c). Il foglio (a) viene prima arrotolato in un cilindro (b). Il toro risultante è stato ingrandito.

Mappe su
superfici «strane»

cienti per certe superfici di ordine superiore, è troppo lunga per essere inclusa qui. Ma forse la seguente abile dimostrazione di un teorema per due colori darà al lettore una qualche nozione di come si può procedere per stabilire un teorema di colorazione di mappe.

Consideriamo un piano...

Consideriamo tutte le possibili mappe su un piano che possono esser formate con rette. L'ordinaria scacchiera ne è un esempio comune. Uno schema meno regolare è mostrato nell'illustrazione di sinistra in fig. 45. Sono sufficienti due colori per tutte queste mappe? La risposta è affermativa e lo si dimostra facilmente. Se aggiungiamo un'altra linea retta (per esempio, la linea nera nella stessa illustrazione) a qualsiasi mappa a linee rette, colorata opportunamente, la linea dividerà il piano in due mappe separate, ognuna correttamente colorata se considerata a sé, ma con coppie di regioni adiacenti dello stesso colore lungo la linea. Per ripristinare una colorazione giusta all'intera mappa, tutto ciò che dobbiamo fare è scambiare i colori da un lato (non importa quale) della riga. Ciò è mostrato nell'illustrazione a destra di fig. 45. La mappa sopra la riga è stata invertita, come se una stampa negativa fosse scambiata in una positiva e, come si può vedere, la nuova mappa è ora colorata nel modo giusto.

Per completare la dimostrazione, consideriamo un piano che è diviso in due regioni da una singola linea. Esso naturalmente può esser coperto con due colori, tracciamo una seconda linea e ricoloriamo la nuova mappa invertendo i colori da un lato della riga. Tracciamo una terza linea e così via. È chiaro che questo procedimento

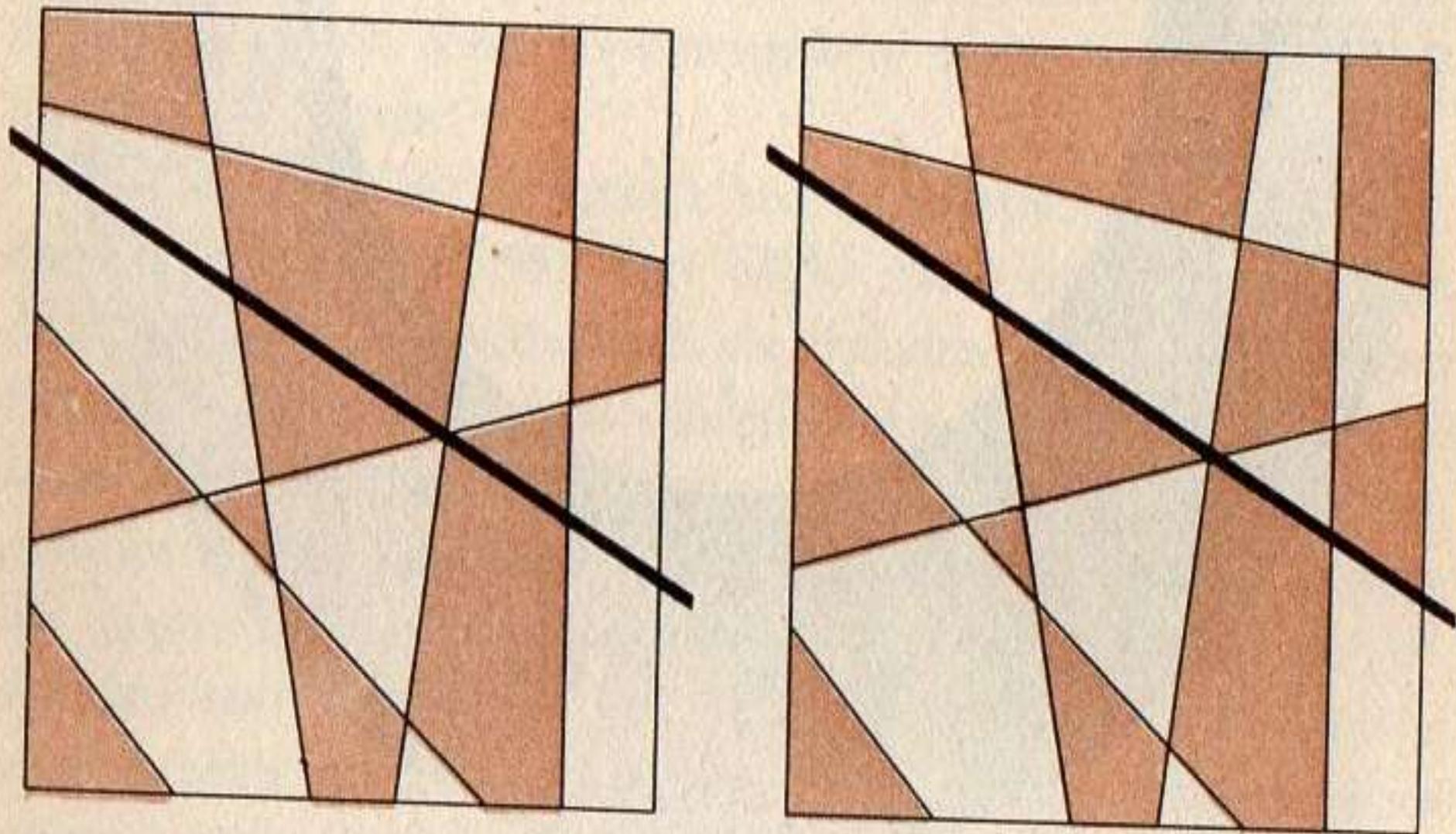


Fig. 45. Due colori bastano per qualsiasi mappa tracciata con linee che ne attraversino l'intera superficie.

è valido per qualsiasi numero di linee, sicché con un metodo noto come « induzione matematica » abbiamo stabilito un teorema per due colori valido per tutte le possibili mappe disegnate con linee rette. La dimostrazione può venire generalizzata sino a coprire mappe meno semplici, quale quella in fig. 46, che sono disegnate con linee senza fine che traversano l'intera mappa o giacciono su di essa come curve chiuse semplici. Se aggiungiamo una linea che taglia la mappa, possiamo invertire i colori da un lato come abbiamo fatto prima. Se la nuova linea è una curva chiusa, invertiamo i colori di tutte le regioni all'interno della curva o, se lo preferiamo, i colori delle regioni all'esterno della curva. Le curve chiuse possono anche intersecarsi, ma allora la ricolorazione diviene più complicata.

Si noti che tutte le mappe a due colori qui mostrate hanno vertici di ordine pari; cioè in ogni vertice si incontrano un numero pari di linee. Si può dimostrare che ogni mappa sul piano può esser colorata

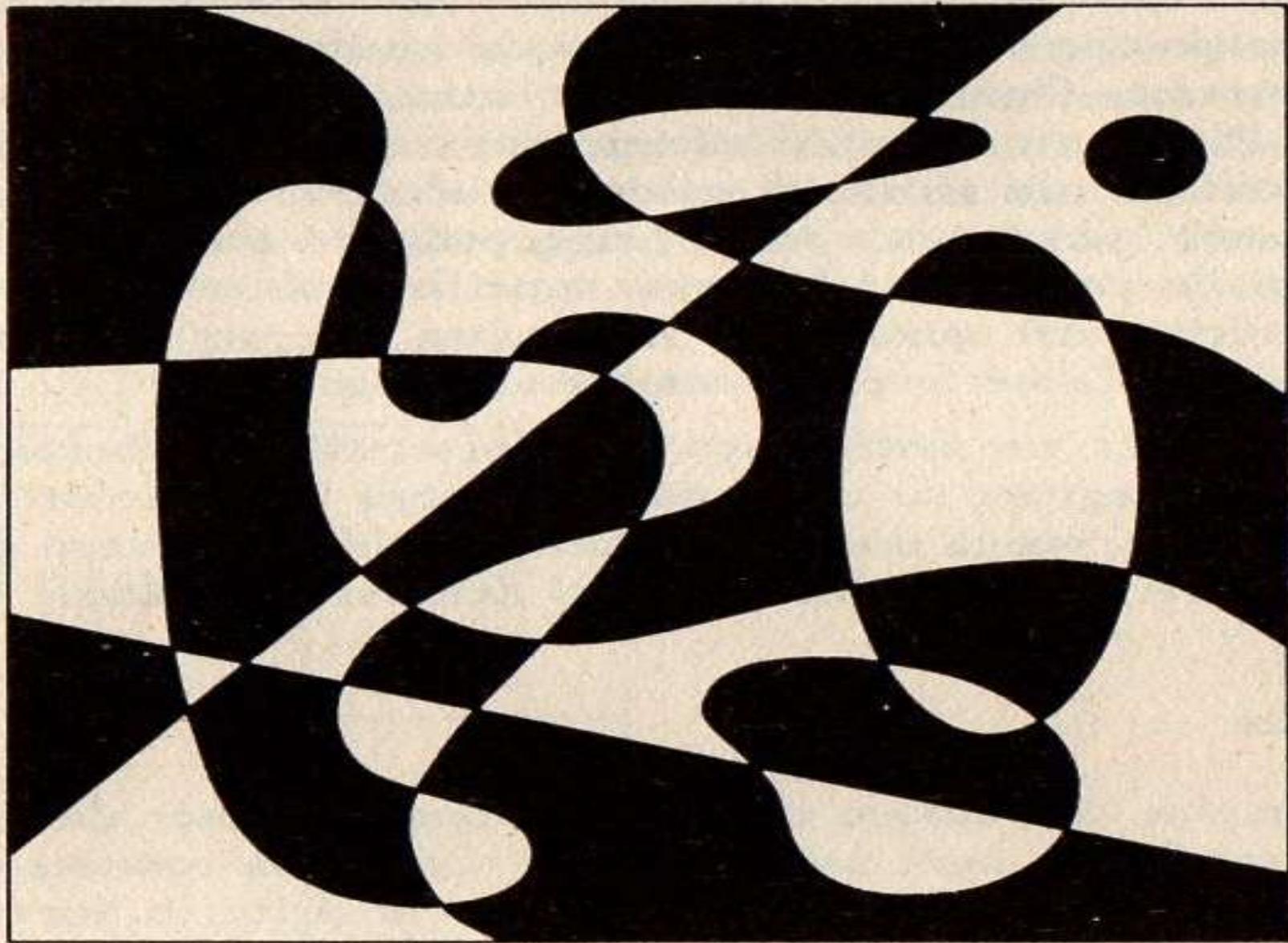


Fig. 46. Due colori bastano anche per una mappa disegnata con linee che l'attraversano completamente o formano curve chiuse.

con due colori se, e solo se, tutti i suoi vertici sono pari. Questo è noto come « teorema delle mappe a due colori ». Che esso non sia valido sul toro lo si vede facilmente tracciando su un foglio di carta quadrato delle righe in modo da formare nove quadrati minori (come una scacchiera di filetto) e arrotolandolo a forma di toro. Questa ciambella a scacchi ha vertici pari ma richiede tre colori.

Ora, più per divertimento, che per chiarificazione, ecco tre problemi di coloritura di mappe che non sono difficili, sebbene ognuno abbia un qualche elemento di « sorpresa » che rende la soluzione un po' diversa da quella che ci si sarebbe aspettati a prima vista:

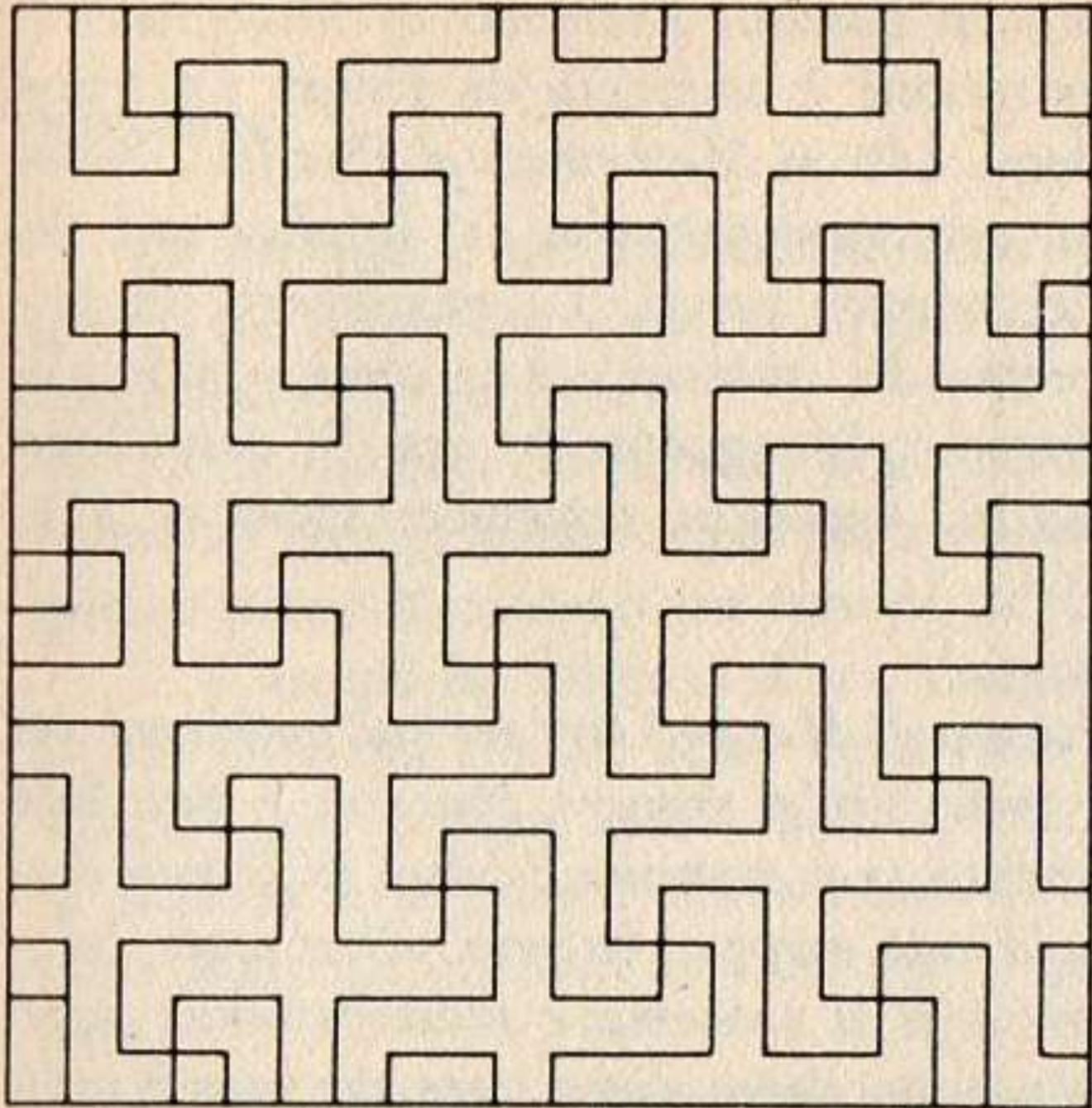
1. Quanti colori sono richiesti per la mappa di fig. 47 (ideata dall'enigmista inglese Henry Ernest Dudeney) in modo che non vi siano due regioni dello stesso colore confinanti?

2. Stephen Barr narra che un pittore desiderava completare una grande tela con il capolavoro astratto delineato in fig. 48. Egli decise di limitarsi a quattro colori e di riempire ogni regione con un colore pieno in modo che vi fosse un diverso colore da ciascun lato di ogni confine comune. Ogni zona aveva un'area di otto metri quadrati eccettuata la zona superiore, di dimensioni doppie delle altre. Quando egli controllò le sue scorte di colori, si accorse di avere a disposizione soltanto: abbastanza rosso per coprire 24 metri quadrati, abbastanza giallo per coprire la stessa superficie, abbastanza verde per coprire sedici metri quadrati e abbastanza blu per dipingere otto metri quadrati. Come fece per completare la sua tela?

3. Leo Moser, un matematico dell'Università di Alberta, chiede: come si può disegnare su un piano una mappa a due colori in modo che comunque vi venga posto sopra un triangolo equilatero di lato 1, tutti e tre i vertici non siano su punti dello stesso colore?

Appendice

L'asserzione che cinque regioni non possono esser disegnate sul piano, in modo che ogni paio abbia un confine in comune, fu fatta da Möbius in una lezione del 1840. Egli la dette in forma di un racconto di un principe orientale che lasciò il suo regno a cinque figli a condizione che esso fosse diviso in cinque regioni, ognuna confinante con le altre. Il problema è equivalente al seguente pro-



Quesiti per
i lettori

Fig. 47. Quanti colori
occorrono per questa
mappa?

blema di teoria dei grafi: è possibile disporre cinque punti su un piano e congiungere ciascuno agli altri mediante rette che non si intersechino? Dimostrazioni di impossibilità non sono difficili e possono essere trovate in qualsiasi volume di teoria elementare dei grafi. Una dimostrazione facile da seguire è data da Heinrich Tietze nel suo

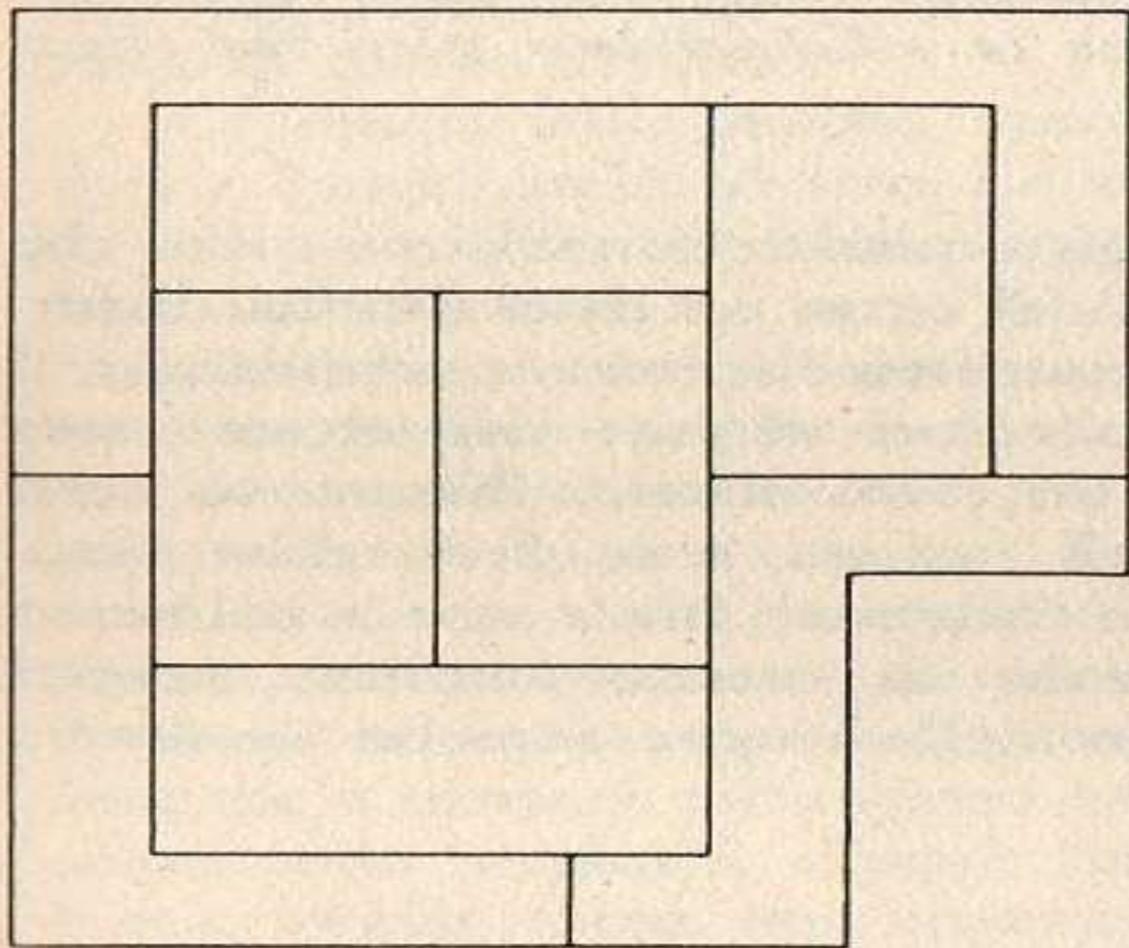


Fig. 48. Quanti colori occorrono per questo quadro astratto?

capitolo « Sui domini vicini » in *Famous Problems of Mathematics*. In sostanza la stessa dimostrazione è schizzata da Henry Dudeney nella sua soluzione al problema 140 in *Mathematical Puzzles*. Dudeney continua argomentando, erroneamente, che ciò implica una dimostrazione del teorema dei quattro colori. La mia libertà di linguaggio nel parlare del teorema dei quattro colori come « indecidibile secondo Gödel » ha provocato la seguente lettera dal cosmologo inglese Dennis Sciama (*Scientific American*, novembre 1960, p. 21):

Signori,

Mi è molto piaciuto l'articolo di Martin Gardner sul problema dei quattro colori. In realtà è impossibile provare che non è possibile dimostrare il teorema. In quanto se il teorema è falso, lo si può mostrare esplicitamente esibendo una mappa che non possa esser colorata con quattro colori. Perciò se il teorema è indimostrabile deve esser vero. Ciò significa che non possiamo dimostrare che esso è indimostrabile, in quanto ciò equivale a dimostrare che esso è vero, il che è una contraddizione.

Lo stesso rilievo vale per qualsiasi teorema la cui falsità può esser dimostrata da un esempio contrario; per esempio l'ultimo teorema di Fermat. Teoremi del genere possono essere indimostrabili, ma solo se sono veri. In tal caso non possiamo mai sapere che sono indimostrabili, sicché i matematici cercheranno indefinitamente di dimostrarli. Questo stato di cose è terrificante. Far della fisica potrebbe sembrare una buona alternativa, ma la « Gödelria » potrebbe invadere anche questo regno...

La situazione è un po' meno tragica quando ci rendiamo conto che un teorema indecidibile secondo Gödel entro un dato sistema deduttivo può sempre esser deciso metamatematicamente ampliando il sistema. Se il teorema dei quattro colori venisse riscontrato esser indecidibile secondo Gödel entro un certo sistema basato su certi postulati di topologia e teoria degli insiemi, esso diverrebbe automaticamente « vero » (come Sciama chiarisce), ma « vero » nel senso metamatematico di esser decidibile in un sistema ampliato, magari un sistema in cui lo stesso teorema della mappa sarebbe un nuovo postulato.

Risposte ai
quesiti

Risposte

Le risposte ai tre problemi di coloritura delle mappe sono le seguenti (le prime due risposte si riferiscono alle fig. 47 e 48 che accompagnano i problemi):

1. La mappa con le svastiche potrebbe esser colorata con due colori se non ci fosse la piccola riga nell'angolo sinistro basso. In questo punto si toccano tre regioni, sicché sono necessari tre colori.

2. L'artista ha colorato il suo disegno astratto mescolando tutta la sua tinta blu con un terzo della tinta rossa ottenendo abbastanza violetto per colorare sedici metri quadrati di tela. Dopo aver tinto in giallo la zona grande alla sommità della tela e la zona al centro, è stato semplice colorare le rimanenti regioni in rosso, verde e violetto.

Risposte ai
quesiti

Risposte

Le risposte ai tre problemi di coloritura delle mappe sono le seguenti (le prime due risposte si riferiscono alle fig. 47 e 48 che accompagnano i problemi):

1. La mappa con le svastiche potrebbe esser colorata con due colori se non ci fosse la piccola riga nell'angolo sinistro basso. In questo punto si toccano tre regioni, sicché sono necessari tre colori.

2. L'artista ha colorato il suo disegno astratto mescolando tutta la sua tinta blu con un terzo della tinta rossa ottenendo abbastanza violetto per colorare sedici metri quadrati di tela. Dopo aver tinto in giallo la zona grande alla sommità della tela e la zona al centro, è stato semplice colorare le rimanenti regioni in rosso, verde e violetto.

3. Per colorare il piano con due colori in modo che i tre punti che segnano i vertici di un triangolo equilatero di lato 1 non cadano sullo stesso colore, il metodo più semplice è di dividere il piano in strisce parallele, ognuna larga $\sqrt{3}/2$, poi colorarle alternativamente in bianco e nero come mostrato in fig. 49. Ciò non risolve il problema, però, sinché non sia introdotto il concetto di insieme aperto e chiuso. Un continuo di numeri reali — diciamo da 0 ad 1 — è detto intervallo chiuso se include 0 ed 1 ed intervallo aperto se non li include. Se include uno e non l'altro, viene detto chiuso ad un estremità ed aperto all'altra.

Le strisce sulla mappa sono chiuse lungo il loro lato sinistro; aperte lungo quello destro. La striscia grigia a sinistra si estende da 0, sull'asse inferiore della mappa, sino a una larghezza di $\sqrt{3}/2$. Essa include lo 0 ma non $\sqrt{3}/2$. La striscia successiva è larga da $\sqrt{3}/2$ incluso a $2\sqrt{3}/2$ escluso, e così di seguito per le altre strisce. In altre parole, ogni linea verticale appartiene solo alla striscia alla sua destra. Ciò è necessario per tener conto dei casi in cui il triangolo, in rosso, giaccia con tutti i suoi tre vertici sulle righe di confine.

Leo Moser, dell'Università di Alberta, che ha inviato questo problema, scrive che non si sa quanti colori sono necessari per colorare il piano in modo che *due* punti qualsiasi, distanti una unità, non vengano a trovarsi sullo stesso colore. È stato dimostrato che quattro colori sono necessari, e sette sufficienti. (Che sette siano sufficienti è reso evidente con una copertura regolare di esagoni, ognuno con

Risposte ai
quesiti

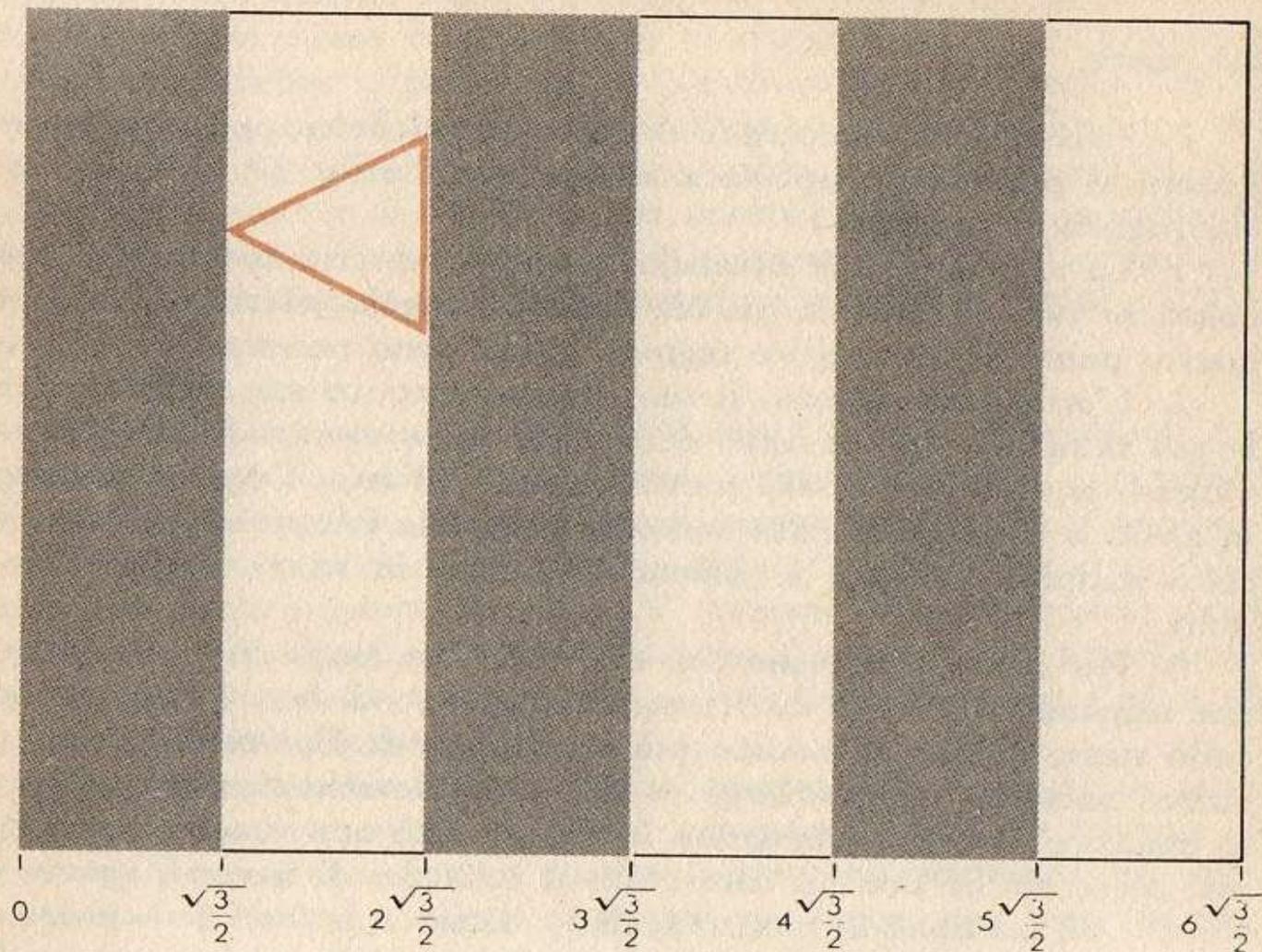


Fig. 49. Soluzione del problema del triangolo e della mappa a due colori.

raggio del cerchio circoscritto leggermente inferiore all'unità ed ognuno circondato da esagoni che differiscono per colore da quello interno e fra di loro). L'intervallo fra quattro e sette è tanto grande che il problema sembra assai distante dalla soluzione.

Idee per un laboratorio di matematica

- ▶ Gli articoli di Martin Gardner possono offrire molti spunti per un'attività laboratoriale di carattere didattico nell'ambito della matematica
 - ▶ Riflessioni insolite su temi tradizionali della matematica
 - ▶ Riflessioni su temi insoliti della matematica non tradizionalmente trattati in classe
 - ▶ Costruzione di artefatti utili per trattare concetti matematici
 - ▶ Analisi matematica di giochi
 - ▶ Ecc. ecc.
- ▶ Il livello di trattazione dei temi è «calibrato» su quello della scuola secondaria di secondo grado
- ▶ Può il punto di partenza per ulteriori approfondimenti

Enigmi e giochi matematici 1

	Pag.	VII		
Introduzione		VII		
1. GLI ESAFLEXAGONI		1		
<i>Appendice</i>		7		
2. MAGIA CON LE MATRICI		13		
<i>Appendice</i>		18		
3. NOVE PROBLEMI		20		
Il ritorno dell'esploratore, 20 – Il poker a carte scoperte, 20 – La scacchiera mutilata, 20 – Il bivio, 21 – Le scatole dall'etichetta sbagliata, 21 – Bronx contro Brooklyn, 22 – Il taglio del cubo, 22 – Il viaggiatore in anticipo, 22 – Le monete false, 23 – Risposte, 24.				
4. FILETTO		32		
<i>Appendice</i>		39		
5. PARADOSSI DELLA PROBABILITÀ		40		
6. IL GIOCO DELL'ICOSAEDRO E LA TORRE DI HANOI		47		
<i>Appendice</i>		51		
7. STRANI MODELLI TOPOLOGICI		53		
<i>Appendice</i>		60		
8. IL GIOCO DELL'HEX		62		
<i>Appendice</i>		66		
<i>Risposte</i>		69		
9. SAM LOYD: IL PIÙ GRANDE ENIGMISTA D'AMERICA		71		
<i>Appendice</i>		78		
<i>Risposte</i>		78		
10. GIOCHI MATEMATICI CON LE CARTE		82		
11. MEMORIZZAZIONE DEI NUMERI		87		
12. ALTRI NOVE PROBLEMI		93		
Le sigarette che si toccano, 93 – I due traghetti, 93 – Trovare la diagonale, 93 – L'abile elettricista, 93 – Attraversamento di un reticolato, 95 – I dodici fiammiferi, 95 – Il buco nella sfera, 95 – Le coccinelle innamorate, 96 – Quanti bambini?, 97.				
<i>Risposte</i>		97		
13. I POLIMINI		107		
<i>Appendice</i>		121		
14. INGANNI MATEMATICI		122		
<i>Appendice</i>		128		
15. NIM E TAC TIX		130		
<i>Appendice</i>		139		
<i>Risposte</i>		139		
16. DESTRA O SINISTRA?		140		
<i>Appendice</i>		146		
Per chi volesse approfondire gli argomenti		150		

Enigmi e giochi matematici 2

Introduzione	153	6. IL CUBO SOMA	200	Acqua e vino	279
1. I CINQUE SOLIDI PLATONICI	155	Appendice	207	Risposte	280
Risposte	163	Risposte	211		
2. I TETRAFLEXAGONI	164	7. TOPOLOGIA RICREATIVA	212	15. ELEUSIS: IL GIOCO DELL'INDUZIONE	287
		Risposte	221	Appendice	292
3. HENRY DUDENEY: IL PIÙ GRANDE ENIGMISTA INGLESE	171	8. ϕ : IL RAPPORTO AUREO	222	Risposte	293
Appendice	178	Appendice	232		
Risposte	178	Risposte	233	16. ORIGAMI	295
4. RADICI NUMERICHE	180	9. LA SCIMMIA E LE NOCI DI COCCO	236	Appendice	302
Appendice	185	Appendice	239	Risposte	303
Risposte	186	Risposte	240		
5. NOVE PROBLEMI	187	10. I LABIRINTI	242	17. IL QUADRATO DI QUADRATI	305
I bulloni rotanti	187	11. LOGICA RICREATIVA	248	Appendice	323
Il volo attorno al mondo	187	Appendice	254		
Il cerchio sulla scacchiera	188	Risposte	254	18. GIOCHI MECCANICI	325
Il tappo di sughero	188	12. I QUADRATI MAGICI	257	Risposte	332
Il numero ripetuto	188	13. LO SPETTACOLO DI JAMES HUGH RILEY, INC.	266		
I missili in collisione	190	Appendice	271	19. PROBABILITÀ E AMBIGUITÀ	333
Le monete che scivolano	190	Risposte	272	Appendice	339
Strette di mano e reti	190	14. ALTRI NOVE PROBLEMI	276	Risposte	340
Il duello triangolare	191	L'attraversamento del deserto	276		
Risposte	192	I due bambini	276	20. IL MISTERIOSO DOTTOR MATRIX	344
		Il problema di scacchi di Lord Dunsany	276		
		Il professore sulla scala mobile	277		
		L'8 solitario	277	BIBLIOGRAFIA	
		La divisione della torta	278	Parte prima	349
		Il foglio ripiegato	278	Parte seconda	353
		Il cassiere distratto	279		

Enigmi e giochi matematici 3

Introduzione	Pag.	IX	8. IL NUMERO TRASCENDENTE π	78	17. H.S.M. COXETER	189
			<i>Appendice</i>	87	<i>Appendice</i>	199
			<i>Risposte</i>	89	<i>Risposte</i>	201
1. IL SISTEMA BINARIO		1	9. VICTOR EIGEN: UN MATEMAGICO	90	18. IL BRIDG-IT ED ALTRI GIOCHI	203
<i>Appendice</i>		9	<i>Appendice</i>	98	<i>Appendice</i>	209
<i>Risposte</i>		10	<i>Risposte</i>	100	<i>Risposte</i>	210
2. TEORIA DEI GRUPPI E TRECCE		11	10. IL TEOREMA DELLA MAPPA A QUATTRO	101	19. ALTRI NOVE PROBLEMI	213
<i>Appendice</i>		20	COLORI	108	Il confronto delle monete, 213 — Cronometrare il	
<i>Risposte</i>		22	<i>Appendice</i>	111	toast, 214 — Due problemi di pentamini, 214 — Un	
			<i>Risposte</i>		teorema sui punti fissi, 215 — Un paio di indovinelli	
3. OTTO PROBLEMI		23	11. IL SIGNOR APOLLINAX VISITA NEW YORK	113	aritmetici, 215 — Come ha fatto Kant a regolare il	
Sezionamento acuto, 23 — Quanto è lungo un « lu-			<i>Appendice</i>	120	suo orologio?, 216 — Il gioco delle « Venti Doman-	
nare »?, 24 — Il gioco del Googol, 24 — I cadetti			<i>Risposte</i>	121	de » fatto conoscendo i valori della probabilità, 217 —	
in marcia e il cane che trotterella, 25 — La cintura					Non dare matto in una mossa, 218 — Trovare gli	
di Barr, 26 — Bianchi, Neri e Rossi, 27 — L'aero-			12. NOVE PROBLEMI	123	esadri, 218 — Risposte, 220.	
plano e il vento, 27 — Il prezzo dei cuccioli, 28 —			Il gioco dell'Hip, 123 — Un problema di manovra		20. IL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE	230
<i>Risposte</i> , 28.			ferroviaria, 123 — I cartelloni pubblicitari della bir-		<i>Appendice</i>	237
			ra lungo l'autostrada, 125 — Il taglio del cubo e della		<i>Risposte</i>	240
4. GIOCHI E INDOVINELLI DI LEWIS CARROL		37	ciambella, 126 — La bisezione dello Yin e Yang,			
<i>Appendice</i>		42	126 — Le sorelle dagli occhi blu, 127 — Quanto è		<i>Per chi volesse approfondire gli argomenti</i>	244
<i>Risposte</i>		43	antica la città Rosa-rossa?, 127 — La gara difficile,			
			128 — La termite e i 27 cubi, 129 — Risposte, 130.			
5. GIOCHI DI CARTA RITAGLIATA		45	13. POLIMINI E RETTANGOLI PERFETTI	140		
<i>Appendice</i>		56	<i>Appendice</i>	147		
<i>Risposte</i>		56	<i>Risposte</i>	148		
			14. I GUASTAFESTE DI EULERO: LA SCOPERTA			
			DI UN QUADRATO GRECO-LATINO DI ORDI-			
			NE DIECI	153		
			<i>Appendice</i>	159		
			<i>Risposte</i>	162		
6. GIOCHI DA SCACCHIERA		58	15. L'ELLISSE	165		
<i>Appendice</i>		66	<i>Appendice</i>	174		
<i>Risposte</i>		68	<i>Risposte</i>	175		
			16. I 24 QUADRATI COLORATI E I 30 CUBI CO-			
			LORATI	177		
			<i>Appendice</i>	186		
			<i>Risposte</i>	188		
7. QUANTE SFERE ENTRANO IN UNA SCATOLA		69				
<i>Appendice</i>		75				
<i>Risposte</i>		77				

Enigmi e giochi matematici 4

	Pag. VII
Introduzione	
1. IL PARADOSSO DELL'IMPICCAGIONE IMPREVEDIBILE	1
<i>Appendice</i>	9
2. NODI E ANELLI BORROMEI	12
<i>Risposte</i>	21
3. IL NUMERO TRASCENDENTE e	22
<i>Appendice</i>	28
<i>Risposte</i>	29
4. SEZIONAMENTI GEOMETRICI	30
<i>Appendice</i>	36
5. SCARNE PARLA DEI GIOCHI D'AZZARDO	39
<i>Appendice</i>	47
<i>Risposte</i>	48
6. LA CHIESA DELLA QUARTA DIMENSIONE	50
<i>Appendice</i>	57
<i>Risposte</i>	58
7. OTTO PROBLEMI	61
Un problema di sistemazione di cifre, 61 - La dama o la tigre?, 62 - Una partita a tennis, 63 - I birilli colo- rati, 63 - Il problema dei sei fiammiferi, 64 - Due pro- blemi di scacchi: attacco minimo e attacco massimo, 66 - Quanto sono andati lontano gli Smith?, 68 - Pre- dire un conteggio con le dita, 68 - Risposte, 69.	
8. SCATOLE DI FIAMMIFERI E MACCHINE CHE IMPARANO A GIOCARE	77
<i>Appendice</i>	85
<i>Risposte</i>	88

9. SPIRALI	90
<i>Risposte</i>	99
10. ROTAZIONI E RIFLESSIONI	101
<i>Risposte</i>	108
11. IL SOLITARIO	109
<i>Appendice</i>	118
<i>Risposte</i>	120
12. FLATLAND	123
<i>Appendice</i>	130
<i>Risposte</i>	132
13. IL CONGRESSO DI MAGIA DI CHICAGO	134
<i>Appendice</i>	141
<i>Risposte</i>	145
14. CRITERI DI DIVISIBILITÀ	147
<i>Appendice</i>	154
<i>Risposte</i>	155
15. NOVE PROBLEMI	157
Le sette schede, 157 - Il grafo senza blu, 158 - Due partite di seguito, 158 - Un paio di crittografie nume- riche, 158 - Sezionamento di un quadrato, 159 - Il traffico di Floyd's Knob, 160 - Le annotazioni a pie' di pagina di Littlewood, 161 - Le cifre da nove a uno danno cento, 162 - I cilindri che si intersecano, 163 - <i>Risposte</i> , 164.	
16. LE OTTO REGINE E ALTRE VARIANTI SCACCHISTICHE	172
<i>Appendice</i>	180
<i>Risposte</i>	182
17. UN ANELLO DI CORDA	185
18. CURVE DI AMPIEZZA COSTANTE	194
<i>Appendice</i>	203
<i>Risposte</i>	203
19. FIGURE PIANE CHE SI RIPETONO	205
<i>Appendice</i>	215
<i>Risposte</i>	216
<i>Per chi volesse approfondire gli argomenti</i>	219

Matemagia

MAGIA CON LE MATRICI

I quadrati magici hanno dato da fare ai matematici per più di 2000 anni. Nella forma tradizionale il quadrato è costruito in modo che i numeri di ogni riga, colonna e di ogni diagonale diano per somma lo stesso totale. Però un quadrato magico di tipo del tutto differente è quello disegnato in fig. 8. Questo quadrato sembra non avere alcun sistema: i numeri appaiono distribuiti nella matrice a caso. Nondimeno il quadrato possiede una proprietà magica tanto stupefacente per la maggior parte dei matematici quanto lo è per le persone comuni.

Per dimostrare praticamente questa proprietà procuratevi cinque monetine e 20 contrassegni (anche dei semplici pezzetti di carta). Fate scegliere a qualcuno un numero qualsiasi del quadrato. Mettete una moneta su questo numero ed eliminate tutti gli altri numeri nella stessa riga e nella stessa colonna coprendoli con i contrassegni.

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Fig. 8.

Chiedete ancora al vostro amico di scegliere un secondo numero da una delle caselle scoperte. Mettete, come prima, una moneta su questo numero e ricoprite tutti gli altri nella stessa riga e colonna. Ripetete ancora due volte questo procedimento. Rimarrà scoperta una casella: copritela con la quinta moneta.

A cosa è uguale la somma dei numeri selezionati?

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Fig. 8.

Chiedete ancora al vostro amico di scegliere un secondo numero da una delle caselle scoperte. Mettete, come prima, una moneta su questo numero e ricoprite tutti gli altri nella stessa riga e colonna. Ripetete ancora due volte questo procedimento. Rimarrà scoperta una casella: copritela con la quinta moneta.

Sommando i cinque numeri posti sotto le monete (numeri scelti apparentemente a casaccio) il totale è sicuramente 57. Non è un caso. Il totale sarà immancabilmente lo stesso comunque si ripeta l'esperimento.

Se vi divertite a risolvere indovinelli matematici, può darsi che desideriate a questo punto fermarvi ad analizzare il quadrato e vedere se è possibile scoprirne il segreto.

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Fig. 8.

Come la maggior parte dei trucchi, questo è assurdamente semplice, una volta spiegato. Il quadrato è nulla più che una tabella di addizione vecchio tipo, sistemata a trucco. Essa è generata da due gruppi di numeri: 12, 1, 4, 18, 0 e 7, 0, 4, 9, 2; la loro somma è 57. Scrivendo il primo gruppo di numeri orizzontalmente sopra la prima riga del quadrato ed il secondo gruppo verticalmente di fianco alla prima colonna (fig. 9), si può vedere subito come vengono determinati i numeri nei quadretti. Il numero nel primo quadretto (prima

	12	1	4	18	0
7	19	8	11	25	7
0	12	1	4	18	0
4	16	5	8	22	4
9	21	10	13	27	9
2	14	3	6	20	2

Fig. 9.

Giochi

IL CUBO SOMA

« ... non un momento di riposo... non un momento per sedersi e pensare — ch  se per qualche sfortunato caso una tal fessura di tempo si apre nella solida sostanza delle loro distrazioni, c'  sempre il Soma, il delizioso Soma... »

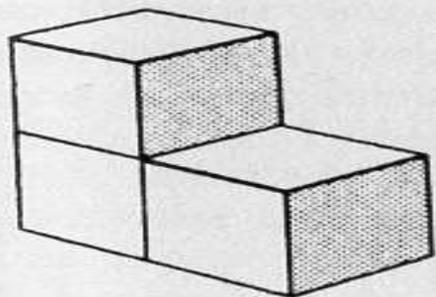
Aldous Huxley, *Brave New World*

Il gioco enigmistico cinese chiamato *tangram*, che si ritiene sia vecchio di migliaia di anni, usa un quadrato di materiale sottile sezionato in sette pezzi (v. Cap. 18). Il gioco consiste nel risistemare quei pezzi in modo da formare altre figure. Ogni tanto ci si   sforzati di inventarne un degno corrispondente in tre dimensioni. Nessuno, secondo me,   riuscito cos  bene come il cubo *Soma*, inventato da Piet Hein, lo scrittore danese i cui giochi matematici, Hex e TacTix, sono stati discussi nel volume precedente (Cap. 8 e 15). (In Danimarca, Piet Hein   pi  noto per il suo libro di poemetti epigrammatici scritto sotto lo pseudonimo di Kumbel).

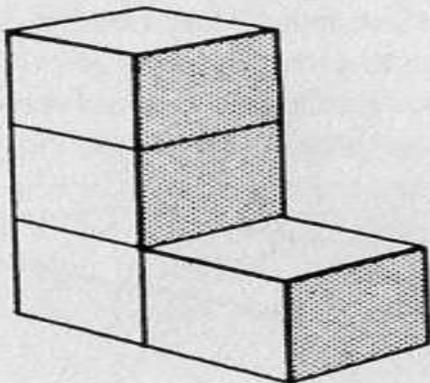
Piet Hein ideò il cubo *Soma* durante una lezione di fisica quantistica di Werner Heisenberg. Mentre il famoso fisico tedesco parlava di uno spazio suddiviso in cubi, la flessibile immaginazione di Piet Hein afferrò una fuggevole intuizione del seguente curioso teorema di geometria. Se prendete tutte le forme irregolari che possono esser costruite combinando non più di quattro cubi, tutti delle stesse dimensioni, uniti per le loro facce, queste forme possono esser riunite insieme in modo da formare un cubo di dimensioni più grandi.

Vediamo di esser più chiari. La più semplice forma irregolare — « irregolare » nel senso che ha da qualche parte una concavità o angolo rientrante — può esser prodotta unendo tre cubi come in 1 di fig. 27. Questa è la sola forma possibile del genere con tre cubetti (naturalmente nessuna forma irregolare è possibile con uno o due cubi). Tornando ai quattro cubi, troviamo che vi sono sei differenti modi di costruire forme irregolari unendo i cubetti per le facce. Queste sono rappresentate da 2 a 7 nella fig. 27. Per iden-

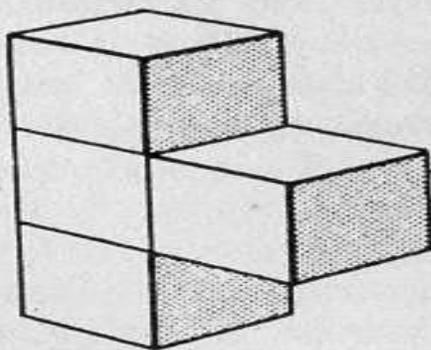
1



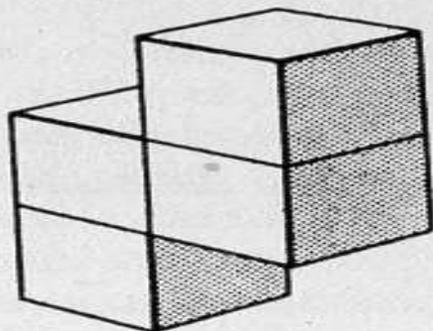
2



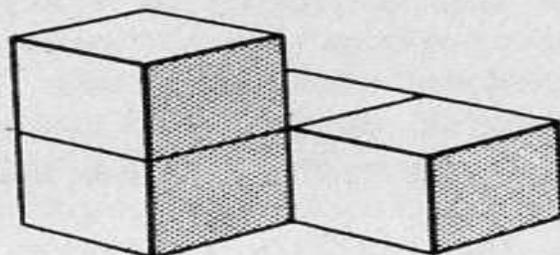
3



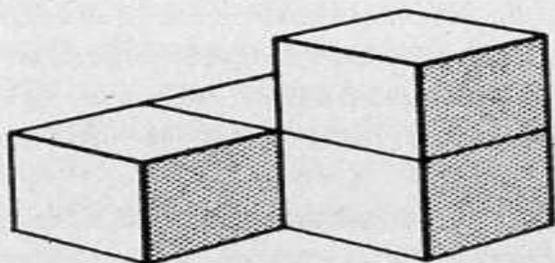
4



5



6



7

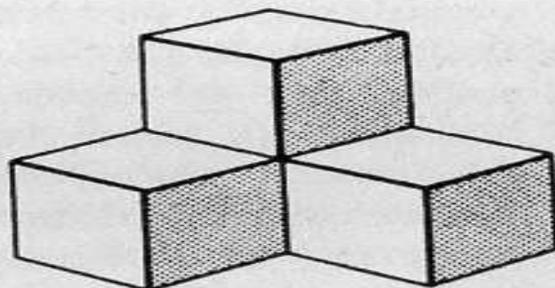


Fig. 27. I sette pezzi del *Soma*.

tificare i sette pezzi, Piet Hein li ha contraddistinti con numeri. Nessuna forma è identica ad un'altra, anche se 5 o 6 sono immagini speculari l'una dell'altra. Piet Hein fa notare che due cubi possono esser uniti solo lungo una coordinata, tre cubi permettono di aggiun-

gere una seconda coordinata perpendicolare alla prima e quattro cubi sono necessari per realizzare la terza coordinata ortogonalmente alle altre due. Dato che non possiamo entrare nello spazio a quattro dimensioni per poter aggiungere cubi lungo una quarta coordinata, è ragionevole limitare il nostro insieme di pezzi *Soma* a questi sette.

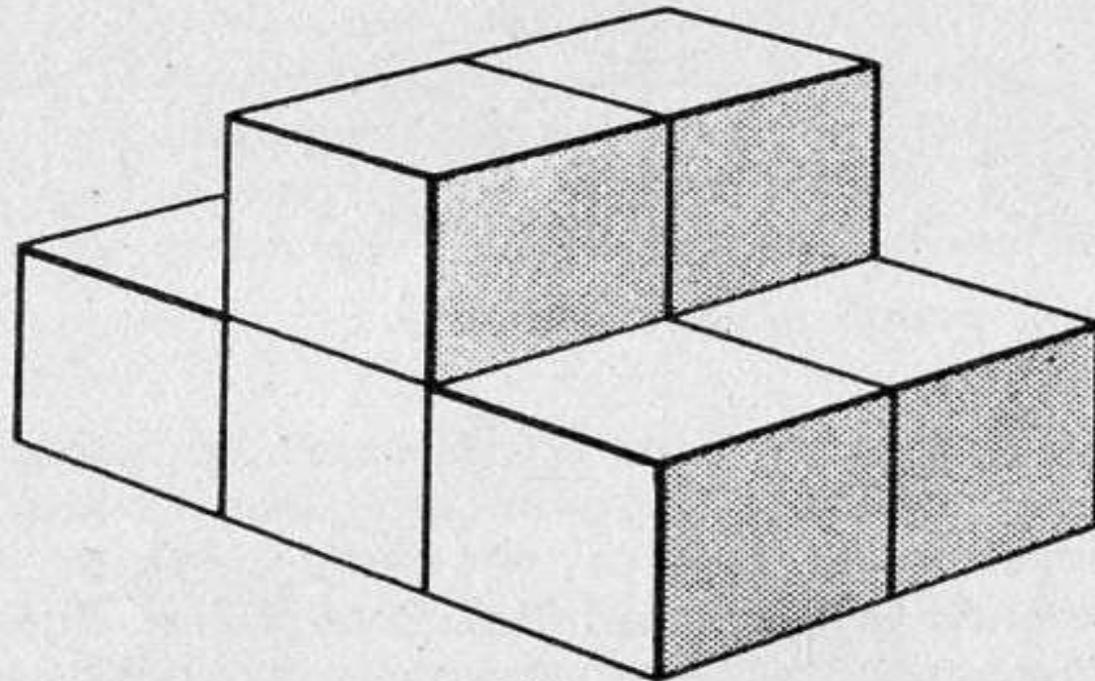
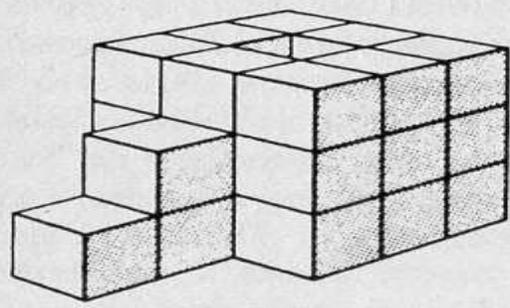


Fig. 28. La forma realizzata con due pezzi del *Soma*.

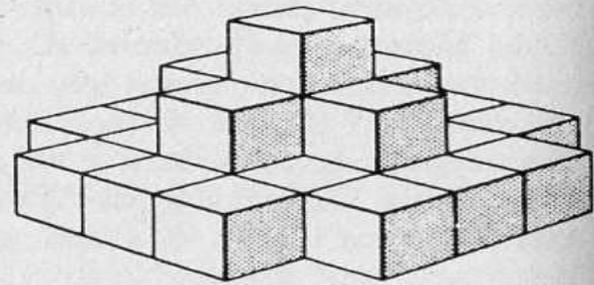
Il fatto imprevisto è che queste combinazioni elementari di cubi identici possano esser unite in modo da formare di nuovo un cubo.

Mentre Heisenberg parlava, Piet Hein si convinse rapidamente, scarabocchiando su un foglio, che i sette pezzi, contenenti in totale 27 piccoli cubi, dovevano formare un cubo di $3 \times 3 \times 3$. Terminata la lezione egli incollò 27 cubetti in modo da formare i sette pezzi componenti ed ebbe la conferma immediata della sua intuizione. Una serie di pezzi fu messa in commercio sotto il nome brevettato di *Soma* e da allora il gioco è cominciato a diventar popolare nelle nazioni scandinave.

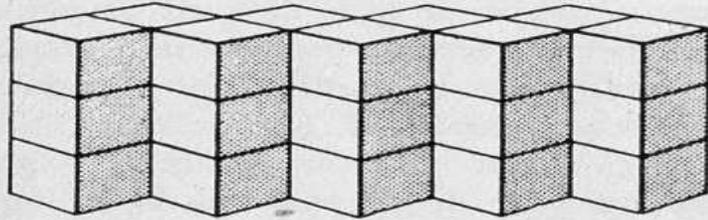
Per costruire un cubo *Soma* — e vi incitiamo a farlo subito perché vi fornirà un gioco che terrà incantato ogni componente della vostra famiglia per ore — dovete solo procurarvi un rifornimento di blocchetti da costruzioni per bambini. I sette pezzi si costruiscono facilmente cospargendo con della colla tenace le facce appropriate, pressandole una contro l'altra e facendole poi asciugare. In effetti il gioco è una specie di versione tridimensionale dei *polimini*, discussi nel volume precedente (Cap. 13).



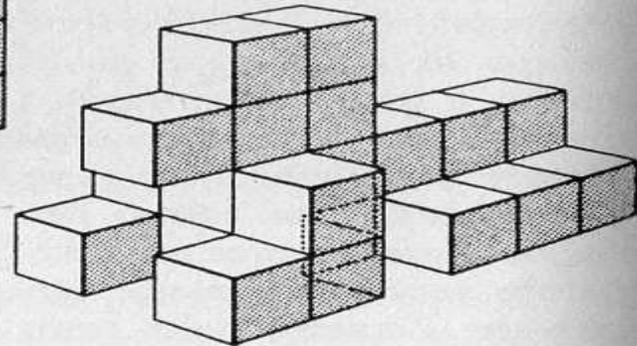
POZZO



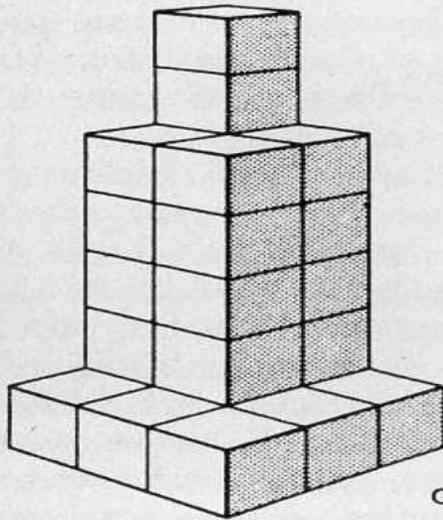
PIRAMIDE



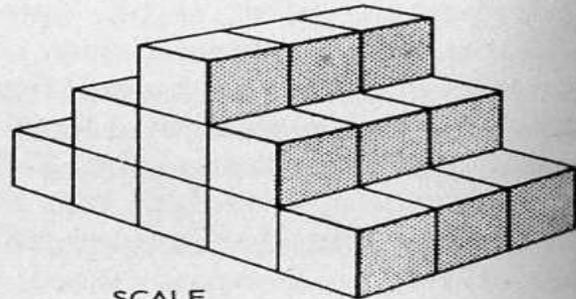
MURO



CANE

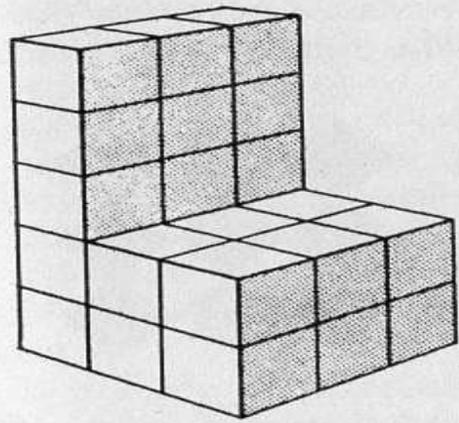


GRATTACIELO

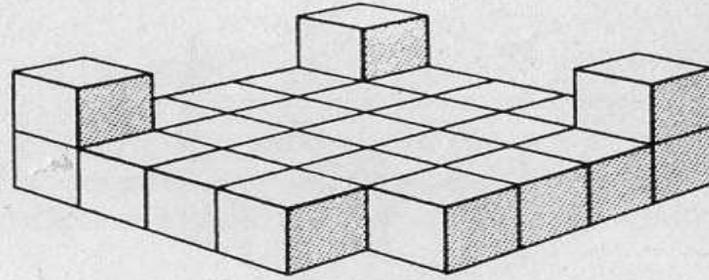


SCALE

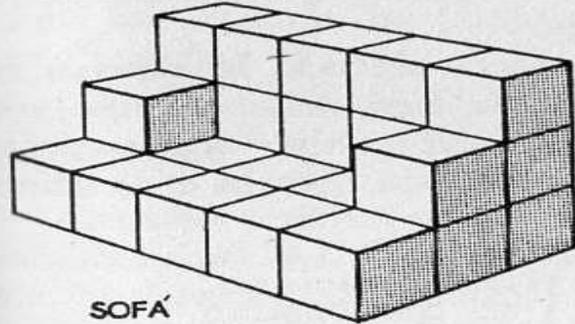
Fig. 29. Una di queste dodici forme non può essere realizzata con i pezzi del *Soma*.



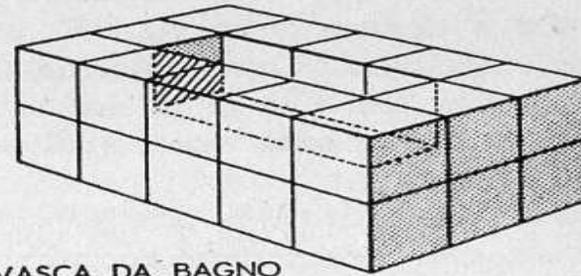
SEDIA



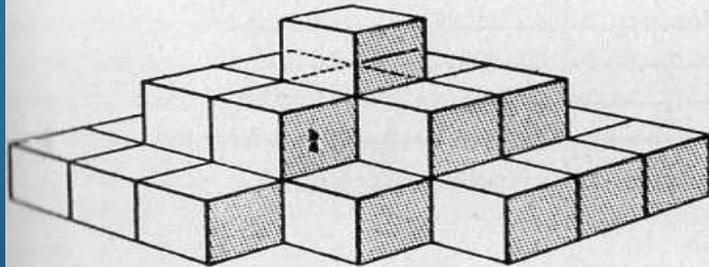
CASTELLO



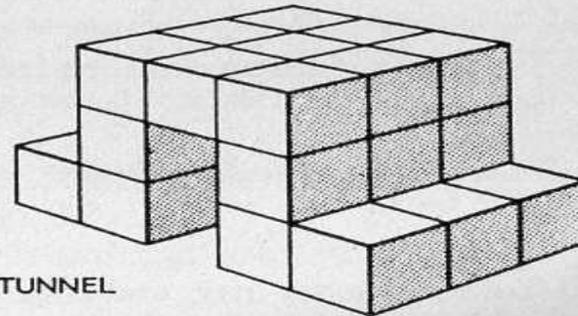
SOFA



VASCA DA BAGNO



BOLLITORE



TUNNEL

tria combinatoria. Consideriamo la struttura di fig. 30. Nessuno è riuscito a costruirla, ma solo di recente è stata ideata una dimostrazione formale di impossibilità. Ecco l'abile dimostrazione, scoperta

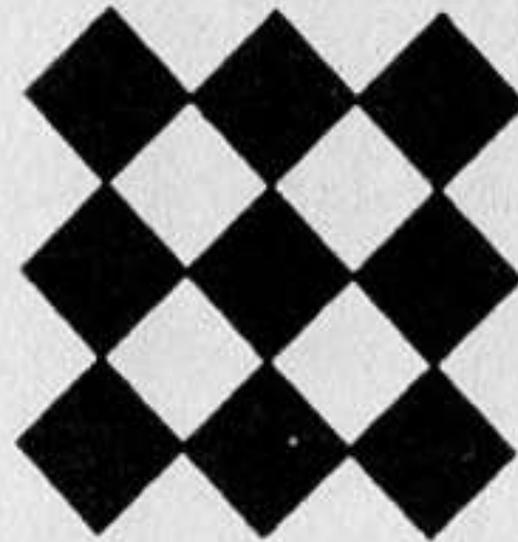
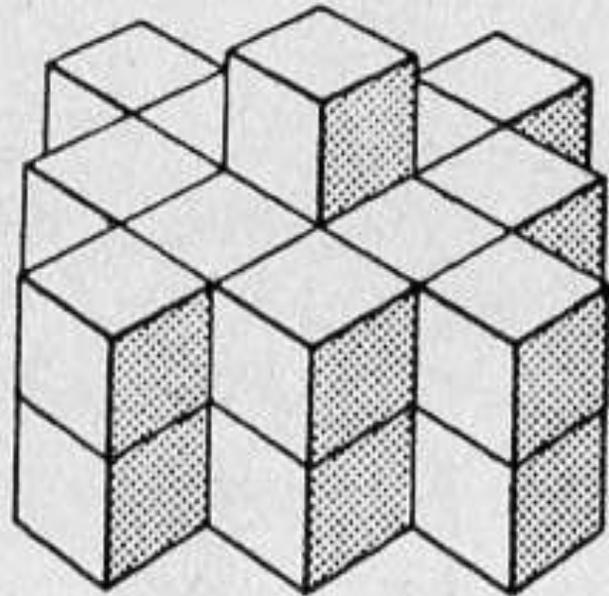


Fig. 30.

Una forma *Soma* impossibile.

Modo di schematizzare la forma.

da Solomon W. Golomb, matematico del Jet Propulsion Laboratory del California Institute of Technology.

Cominciamo a considerare la struttura secondo lo schema mostrato a destra della fig. 30 colorando le basi delle colonne come una scacchiera. Ogni colonna è alta due cubi, salvo quella centrale che è alta tre. Ciò ci dà un totale di otto cubi bianchi e diciannove neri, una disparità fuori dell'ordinario.

PEZZO SOMA	NUMERO MASSIMO DEI CUBI NERI	NUMERO MINIMO DEI CUBI BIANCHI
1	2	1
2	3	1
3	3	1
4	2	2
5	3	1
6	3	1
7	2	2
	18	9

Fig. 31. Tabella per la dimostrazione di impossibilità.

Esaminiamo poi ognuno dei sette componenti, provandoli in tutti gli orientamenti per stabilire il massimo numero di cubi neri che potrebbe avere se sistemato sulla struttura a scacchiera. La tabella di fig. 31 mostra il massimo numero per ogni pezzo. Come si può

vedere, il totale è 18 neri e 9 bianchi, esattamente uno di meno rispetto alla ripartizione 19-8 richiesta. Se spostassimo il blocchetto nero alla sommità su una delle colonne di blocchi bianchi, allora il rapporto bianchi-neri cambierebbe nel rapporto richiesto 18-9 e la struttura sarebbe costruibile.

Devo confessare che una delle strutture di fig. 29 non si può realizzare. Il lettore medio dovrebbe impiegare diversi giorni, però, per scoprire quale è. Non darò nel paragrafo delle risposte i metodi per costruire le altre figure (si tratta solo di tempo sinché si riesce a realizzare la prima), ma indicherò quella che non può esser costruita.

Il numero di piacevoli strutture che possono esser costruite con i sette pezzi *Soma* sembra essere illimitato come il numero di figure piane che possono esser formate con le sette forme del *tangram*. È interessante notare che se si mette da parte il pezzo 1, i rimanenti sei possono dar luogo ad una forma esattamente eguale alla 1 ma di altezza doppia.

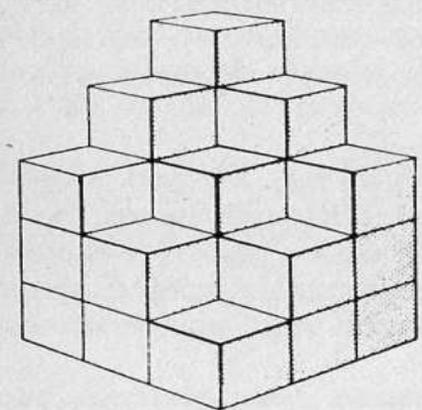
Appendice

Quando scrissi l'articolo sul *Soma*, pensavo che pochi lettori si sarebbero preso il disturbo di costruire realmente una serie di pezzi, ma mi sbagliavo. Migliaia di lettori inviarono schemi di nuove figure *Soma* e molti si lagnarono che il loro tempo libero era stato distrutto da quando erano stati punti dall'insetto del *Soma*. Gli insegnanti fabbricarono delle serie *Soma* per le loro classi. Gli psicologi aggiunsero il *Soma* ai loro test psicologici. I drogati dal *Soma* ne costruirono delle serie per gli amici ricoverati in ospedale e ne fecero regali per Natale. Una dozzina di Ditte fecero richiesta di diritti di fabbricazione. La Gem Color Company, 200 Fifth Avenue, New York, N.Y., mise in vendita una serie di legno — la sola autorizzata da Piet Hein — e continua ancora a venderla nei negozi di giocattoli e di novità.

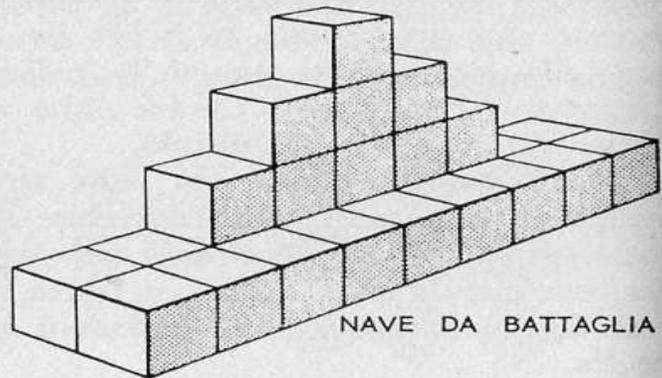
Fra le centinaia di nuove figure *Soma* ricevute dai lettori, ho scelto le dodici che compaiono in fig. 32.

Alcune di queste figure sono state scoperte da più di un lettore. Tutte possono esser costruite.

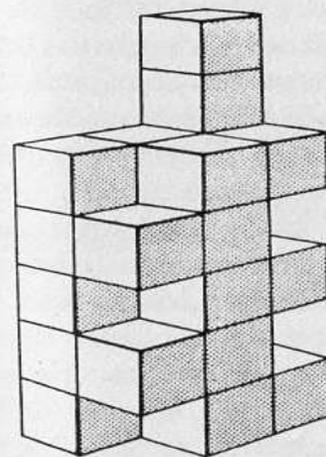
Il fascino del *Soma* deriva in parte, credo, dal fatto che si usano solo sette pezzi e non si è soffocati dalla complessità. Può venire



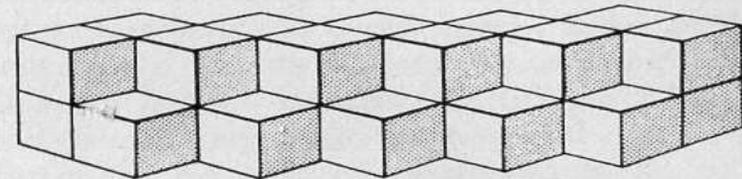
CRISTALLO



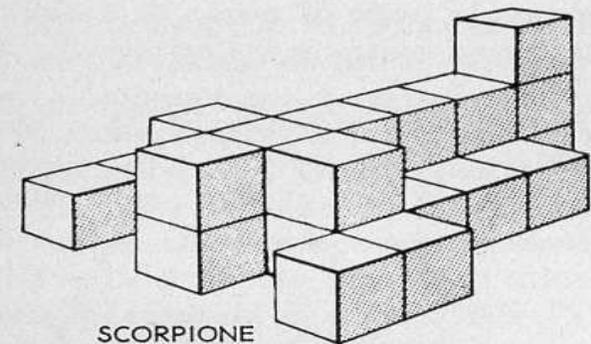
NAVE DA BATTAGLIA



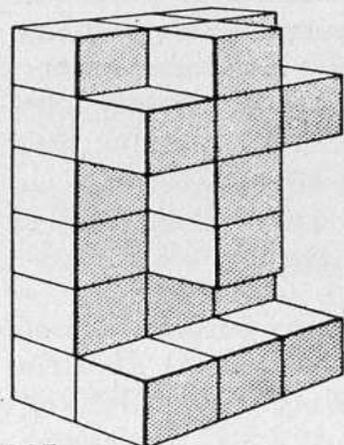
PALAZZO MODERNO
DA APPARTAMENTI



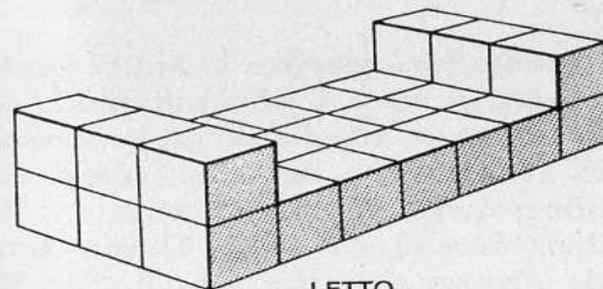
MURO



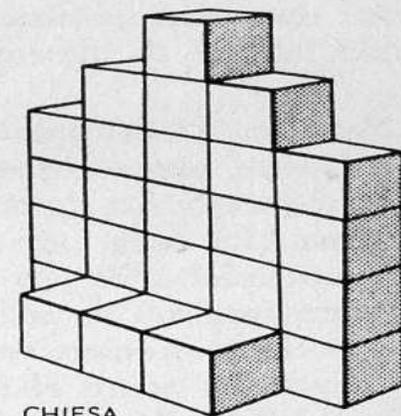
SCORPIONE



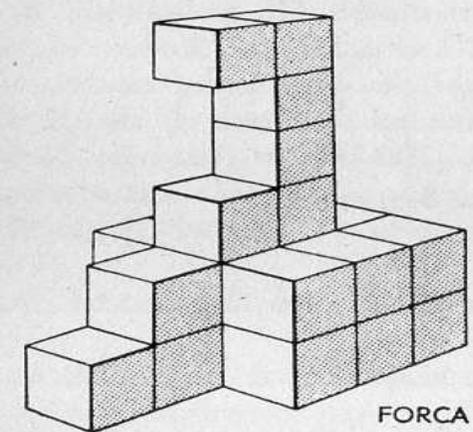
CROCE



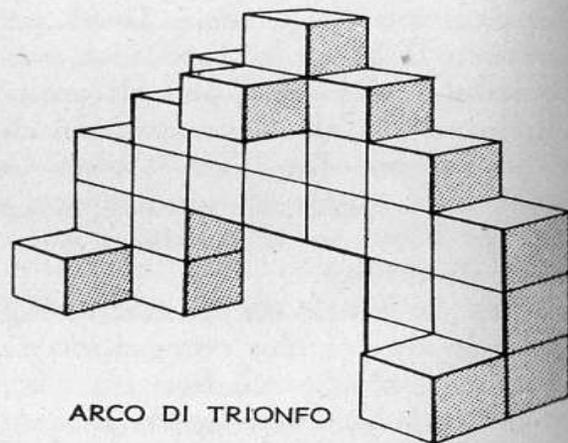
LETTO



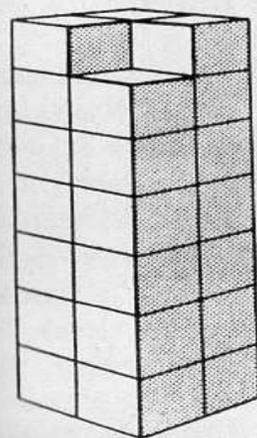
CHIESA



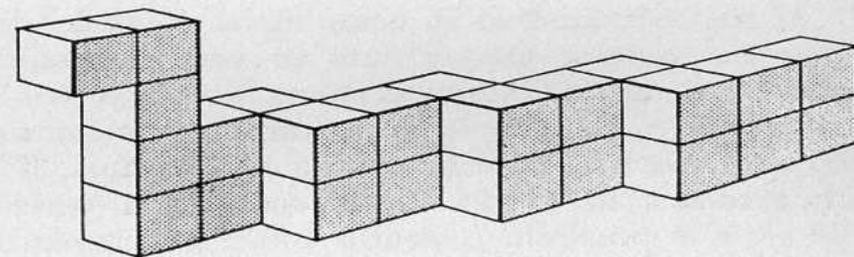
FORCA



ARCO DI TRIONFO



TORRE



SERPENTE

in mente ogni specie di variazioni della serie con un numero di pezzi maggiore ed ho ricevuto molte lettere con la loro descrizione.

Tedoro Katsanis di Seattle, in una lettera del 23 dicembre 1957 (prima che apparisse l'articolo sul *Soma*), proponeva una serie di otto differenti pezzi componibili con quattro cubi. Questa serie includeva sei dei pezzi *Soma* più una catena rettilinea di quattro cubi ed un quadrato di 2×2 . Katsanis li chiamava « quadracubi »; altri lettori in seguito suggerirono « tetracubi ». Gli otto pezzi, naturalmente, non formano un cubo; ma si uniscono esattamente a formare un solido rettangolare di $2 \times 4 \times 4$. Questo è un modello, alto il doppio, del tetracubo quadrato. È possibile formare modelli simili di ciascuno degli altri sette pezzi. Katsanis trovò ancora che gli otto pezzi possono esser divisi in due serie di quattro, ognuna delle quali può esser riunita a formare un solido rettangolare di $2 \times 2 \times 4$. Questi due solidi possono esser messi assieme in diversi modi formando modelli di dimensioni doppie di sei degli otto pezzi base.

Nel Cap. 13 del volume precedente ho descritto i dodici pentamini: forme piatte costruite unendo in tutti i possibili modi dei quadrati unitari. La sig.ra M. R. Robinson, moglie di un professore di matematica della Università di California a Berkeley, scoprì che se ai pentamini si dà una terza dimensione, di altezza unitaria, i dodici pezzi formano un solido rettangolare di $3 \times 4 \times 5$. Questo fatto fu scoperto indipendentemente da diversi altri, fra cui Charles W. Stephenson, di South Hero, nel Vermont. Il Dr. Stephenson trovò anche il modo di metter assieme i pentamini in tre dimensioni per formare solidi rettangolari di $2 \times 5 \times 6$ e $2 \times 3 \times 10$.

Il passo successivo in complessità è quello dei 29 pezzi formati mettendo assieme cinque cubi in tutti i possibili modi. Katsanis, nella stessa lettera summenzionata, lo suggeriva e chiamava i pezzi « pentacubi ». Sei coppie di pentacubi sono immagini speculari l'uno dell'altro. Se usiamo solo uno di ogni coppia, il numero dei pentacubi scende a 23. Sia 29 che 23 sono primi, perciò con nessuna delle due serie è possibile costruire solidi rettangolari. Katsanis propose un problema di triplicazione: scegliere uno dei 29 pezzi, indi usare 27 dei 28 pezzi rimanenti per formare un modello del pezzo scelto, ma tre volte più alto.

Una bella serie di pentacubi mi fu mandata nel 1960 da David Klarner di Napa, in California. Io li ho tirati fuori dalla scatola di

legno in cui erano sistemati e non son più riuscito a rimetterli a posto. Klarner ha speso parecchio tempo a sviluppare figure insolite formate da pentacubi ed io ne ho speso altrettanto a cercare di ricostruirne qualcuna. Egli scrive che vi sono 166 « esacubi » (pezzi formati unendo sei cubi unitari), dei quali è stato così gentile da *non* mandarmene una serie.

Risposte

La sola struttura di fig. 29 che non è possibile costruire con i sette pezzi *Soma* è il grattacielo.

FILETTO

Chi da ragazzo non ha giocato al filetto? quella antichissima ed universale competizione mentale della quale Wordsworth scrisse (*Prelude*, libro I):

*a sera, quando con una matita e una liscia lavagna
interamente divisa in quadretti tutti
con crocette e simboli scarabocchiavamo
facendo piani e trucchi, testa a testa
in una tenzone troppo umile come oggetto di versi.*

A prima vista non è facile capire la costante attrattiva di un gioco che sembra nulla più che un gioco da bambini. Mentre è vero che anche la più semplice versione del gioco offre un numero di mosse grandissimo: 15.120 (pari a $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$) sequenze differenti per le sole prime cinque mosse; vi sono in effetti solo pochi schemi fondamentali e qualsiasi astuto giovanotto può diventare un giocatore imbattibile con un'ora o poco più di analisi del gioco. Ma il filetto ha anche variazioni e aspetti strategici più complessi.

Nella terminologia della teoria dei giochi, il filetto è un gioco a due persone, « finito » (cioè con un risultato determinato), senza elementi dovuti al caso e giocato con « informazione perfetta », in quanto tutte le mosse sono note ad entrambi i giocatori. Se giocato « razionalmente » da entrambi i lati, il gioco termina alla pari. La sola possibilità di vincere è nel far cadere un avversario inesperto in una « trappola » che permetta di completare una « fila » alla mossa successiva in due modi, uno solo dei quali può essere bloccato.

Delle tre possibili aperture — casella d'angolo, di centro e di lato — la più forte è quella d'angolo, perché l'avversario può evitare di essere intrappolato alla mossa successiva solo con una delle otto possibili scelte: il centro. Inversamente le trappole dell'apertura centrale possono essere bloccate solo occupando un angolo. L'apertura su un lato, per molti aspetti la più interessante per la ricchezza di trappole da entrambe le parti, deve essere controbattuta occupando una delle quattro caselle. Le tre aperture e le possibili risposte del

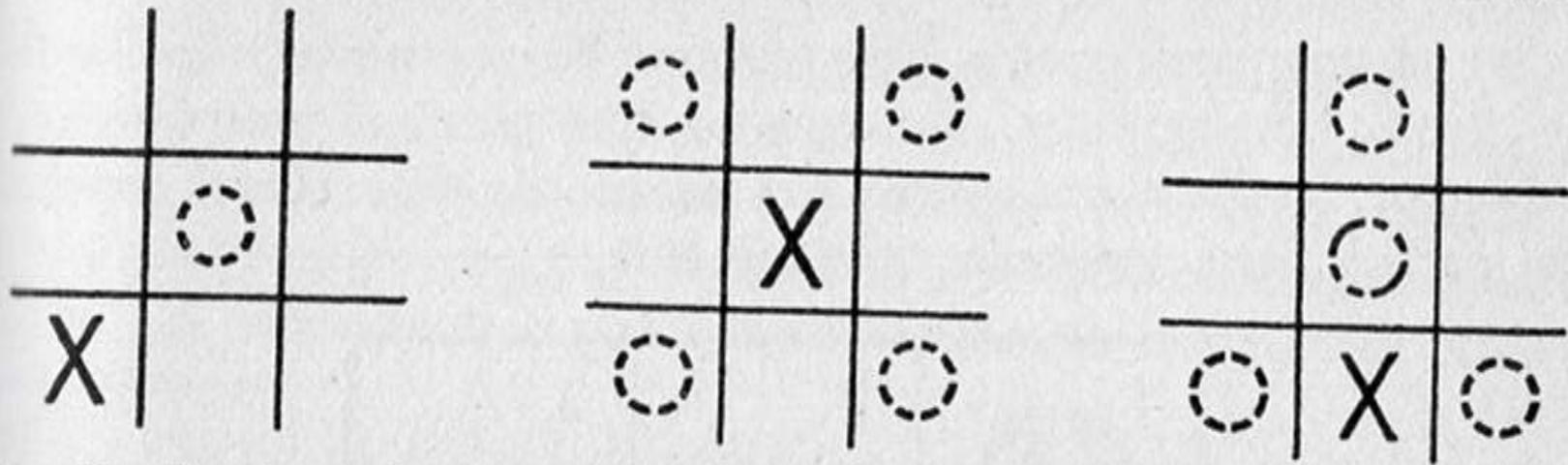


Fig. 17. Il primo giocatore (X) può scegliere fra tre aperture. Per evitare di perdere il secondo giocatore (O) deve scegliere una delle caselle indicate.

secondo giocatore che giochi razionalmente sono rappresentate in fig. 17.

Varianti del filetto più interessanti di questa dal lato matematico furono giocate molti secoli prima dell'era cristiana. Tutte richiedono sei gettoni e possono essere giocate sulla scacchiera mostrata in fig. 18: uno dei giocatori può usare tre monete da dieci, l'altro

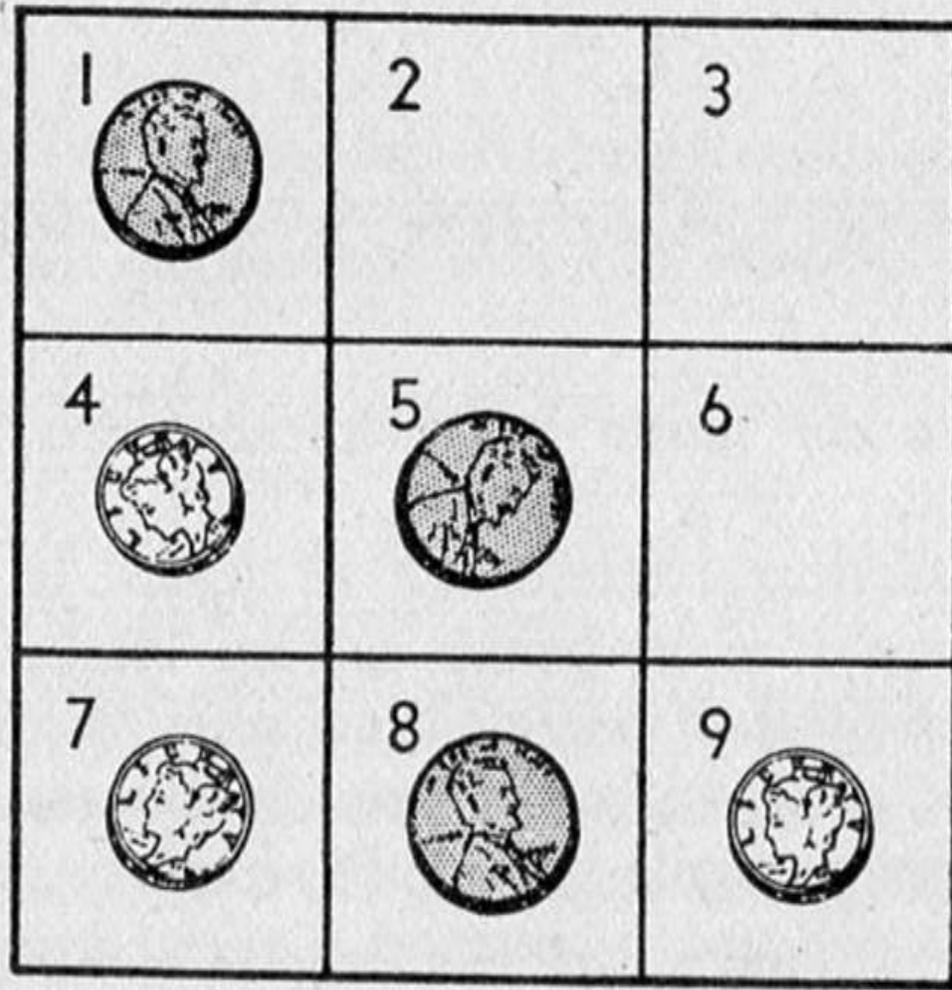


Fig. 18. Filetto con le monete.

tre monete da cinque. Nella forma più semplice, popolare nella antica Cina, Grecia e Roma, i giocatori a turno mettono una pedina sulla scacchiera sinché tutte e sei sono piazzate. Se nessun giocatore ha vinto realizzando una fila (ortogonalmente o diagonalmente) essi continuano a giocare muovendo a turno una sola pedina in una casella adiacente. Sono permesse solo mosse in senso ortogonale.

Ovidio nomina questo gioco nel Libro terzo della sua *Ars Amatoria*, includendolo in un gruppo di giochi che egli consiglia ad una donna di conoscere bene se vuole aver successo con gli uomini. Il gioco era comune in Inghilterra nel 1300 quando era chiamato « la morra dei tre uomini », antenato della morra dei nove, o undici o dodici uomini, o « mill » come è oggi comunemente chiamato negli Stati Uniti. Dato che il primo giocatore è sicuro di vincere occupando alla prima mossa la casella centrale, questa apertura è di solito proibita. Con questa restrizione il gioco ha pari possibilità se giocato razionalmente, ma è pieno di trappole potenziali per entrambi le parti.

Una variante di questo gioco permette di muovere nelle caselle adiacenti anche lungo le due diagonali principali del quadrato. Una ulteriore estensione (attribuita ai primi Indi americani) consente a qualunque pedina di muovere di un passo in qualunque direzione, ortogonalmente o diagonalmente (per es., dalla casella 2 alla 4). Nella prima versione il giocatore che inizia vince sicuramente se gli è permessa l'apertura al centro, ma la seconda variante porta probabil-

mente ad una partita patta. Una versione libera, chiamata in Francia *les pendus* (gli impiccati), consente ad ogni pezzo di esser messo in qualunque casella vuota. Anche per questa si ritiene che si arrivi ad una partita patta giocando razionalmente.

Molte varianti del filetto a pedine mobili sono state applicate a scacchiere di 4×4 , con giocatori muniti di quattro pedine da riunire in file di quattro. Qualche anno fa il prestigiatore John Scarne mise in vendita una interessante versione di 5×5 chiamata « teeko ». I giocatori collocano a turno sino a quattro pedine, poi alternativamente muovono un pezzo alla volta in qualsiasi direzione. Vince chi forma una fila di quattro pedine, ortogonalmente o diagonalmente, o una disposizione quadrata su quattro caselle adiacenti.

Molte divertenti varianti del filetto, però, non usano pedine mobili. Una di queste è la seguente: si gioca come al solito, ma il primo giocatore che forma una fila perde. Il secondo giocatore in questo caso ha un deciso vantaggio. Il primo giocatore può forzare la partita patta solo se occupa alla prima mossa il centro. Poi, giocando le mosse simmetricamente opposte a quelle del secondo giocatore si assicura la parità.

di $3 \times 3 \times 3$ il giocatore che ha la prima mossa vince facilmente. Fatto curioso, il gioco non può mai terminare alla pari perché il primo giocatore ha quattordici giocate ed è impossibile farle tutte e quattordici senza riempire una fila. Il cubo di $4 \times 4 \times 4$ conduce a giocate ancora più interessanti e può o meno terminare alla pari se giocato razionalmente.

Altri modi di giocare su scacchiere cubiche sono stati proposti. Alan Barnert di New York suggerisce di definire vinta una partita quando si ottiene una disposizione quadrata di pedine su uno qualsiasi dei piani ortogonali e dei sei piani diagonali principali. Price Parks e Robert Satten, studenti dell'Università di Chicago nel 1941, hanno ideato un interessante gioco su cubo di $3 \times 3 \times 3$ nel quale si vince formando due righe intersecantisi. La mossa che dà la vittoria deve essere quella nel punto di intersezione. Siccome la mossa iniziale che occupa il cubetto centrale assicura la vittoria, questa mossa è proibita a meno che non sia quella che dà la vittoria o che sia necessaria a bloccare la vittoria avversaria alla mossa successiva.

Negli ultimi anni sono stati messi in vendita diversi tipi di **filetti tridimensionali**. Sono giocati su scacchiere cubiche e si vince formando una fila lungo qualsiasi allineamento ortogonale o diagonale sia sulle facce che sulle quattro diagonali principali del cubo. Con un cubo

di $3 \times 3 \times 3$ il giocatore che ha la prima mossa vince facilmente. Fatto curioso, il gioco non può mai terminare alla pari perché il primo giocatore ha quattordici giocate ed è impossibile farle tutte e quattordici senza riempire una fila. Il cubo di $4 \times 4 \times 4$ conduce a giocate ancora più interessanti e può o meno terminare alla pari se giocato razionalmente.

Altri modi di giocare su scacchiere cubiche sono stati proposti. Alan Barnert di New York suggerisce di definire vinta una partita quando si ottiene una disposizione quadrata di pedine su uno qualsiasi dei piani ortogonali e dei sei piani diagonali principali. Price Parks e Robert Satten, studenti dell'Università di Chicago nel 1941, hanno ideato un interessante gioco su cubo di $3 \times 3 \times 3$ nel quale si vince formando due righe intersecantisi. La mossa che dà la vittoria deve essere quella nel punto di intersezione. Siccome la mossa iniziale che occupa il cubetto centrale assicura la vittoria, questa mossa è proibita a meno che non sia quella che dà la vittoria o che sia necessaria a bloccare la vittoria avversaria alla mossa successiva.



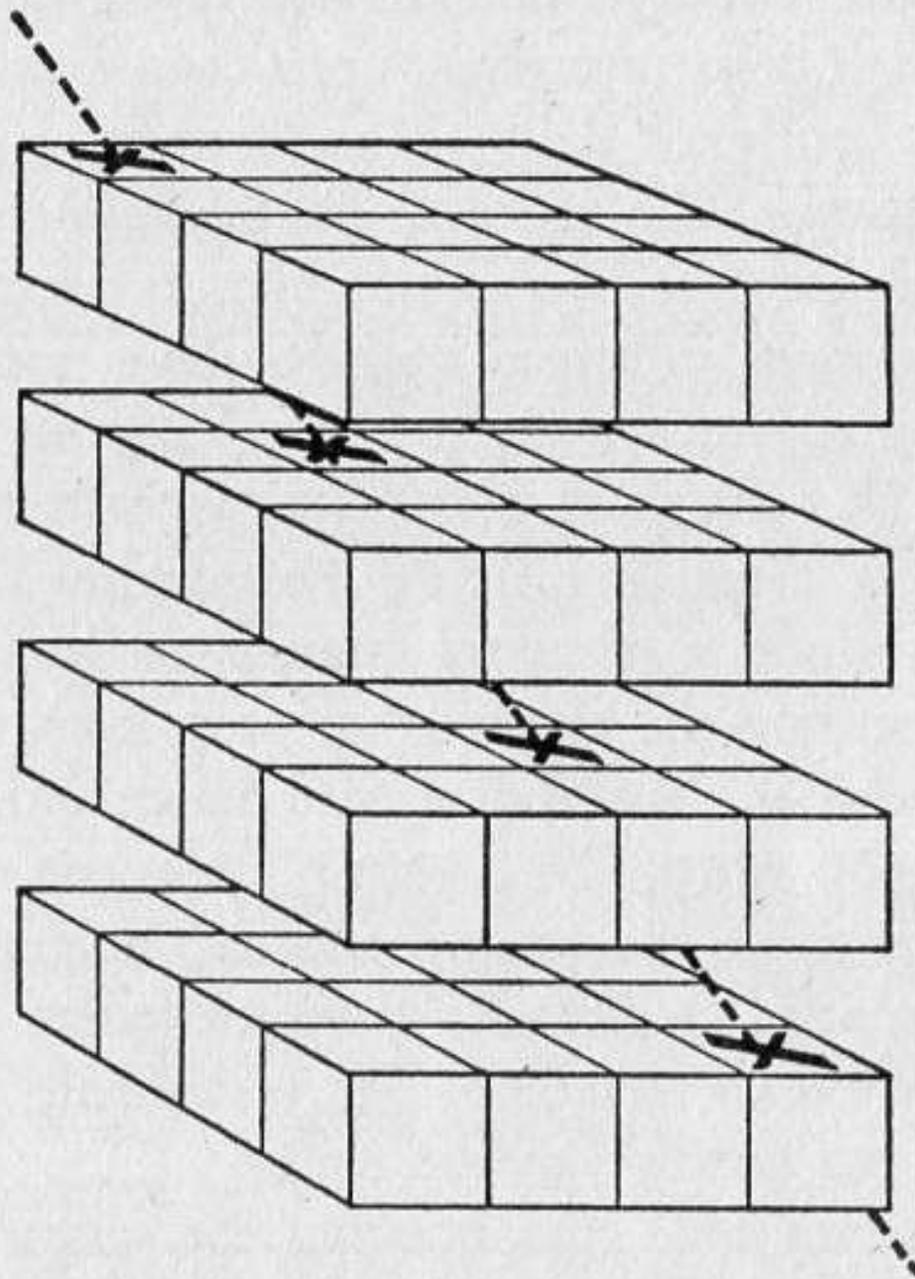


Fig. 20. Disposizione vincente sul cubo riunito.

Un filetto quadridimensionale può essere giocato su un immaginario ipercubo sezionandolo in due quadrati bidimensionali. Un ipercubo di $4 \times 4 \times 4 \times 4$, per esempio, verrebbe diagrammato come in fig. 19. Su questo tipo di scacchiera la fila di quattro che dà la vittoria si ottiene quando vengono disposti quattro contrassegni in linea retta su qualsiasi cubo formato riunendo quattro quadrati in successione lungo un allineamento ortogonale o lungo una delle due diagonali principali. La fig. 20 mostra una disposizione vincente su un cubo del genere. Si ritiene che il primo giocatore abbia la vittoria certa, ma il gioco può anche dare un pareggio se giocato su un ipercubo di $5 \times 5 \times 5$. Il numero di righe possibili sulle quali è possibile vincere in un cubo ad n dimensioni è dato dalla seguente formula (n è il numero di dimensioni, k il numero di caselle per lato):

$$\frac{(k + 2)^n - k^n}{2}$$

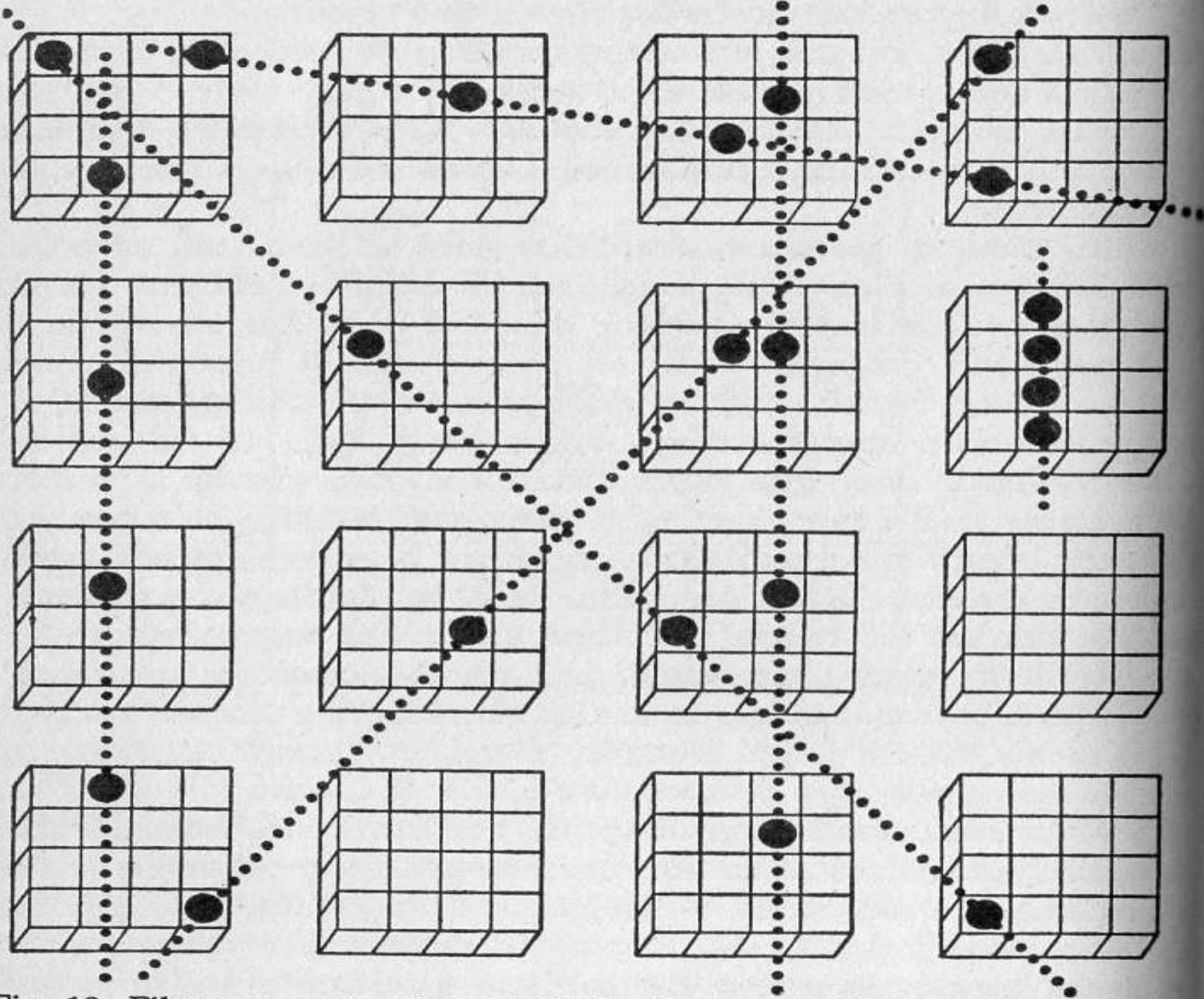


Fig. 19. Filetto a quattro dimensioni. Le linee punteggiate presentano alcune disposizioni vincenti.

Durante l'ultimo decennio scorso sono state costruite numerose macchine elettriche per giocare a filetto. È interessante sapere che il primo robot per giocare a filetto fu inventato (benché mai effettivamente costruito) da Charles Babbage, il pioniere inglese del XIX se-

colo nel campo della invenzione di macchine calcolatrici. Babbage aveva in mente di presentare la sua macchina a Londra per raccogliere fondi per progetti più audaci, ma abbandonò il suo progetto dopo aver saputo che le esposizioni di macchine curiose per giocare (inclusa una macchina parlante ed una che componeva versi latini), allora in corso a Londra, erano state degli insuccessi finanziari.

Un aspetto nuovo del robot di Babbage era il suo metodo di effettuare delle scelte a caso di fronte alla possibilità di alternative di gioco egualmente buone. La macchina registrava il conto totale delle partite vinte. Chiamata a scegliere fra le mosse A e B, essa esaminava questo totale, giocava A se il numero era pari, B se dispari. Nel caso di tre alternative, il robot divideva il totale per tre ed otteneva dei resti di 0, 1, o 2, risultati che portavano ognuno ad una differente mossa. « È ovvio » scriveva Babbage nei suoi *Passaggi dalla vita di un filosofo* del 1864, pag. 467-471 « che in questo modo si può tener conto di qualsiasi numero di condizioni. Uno spettatore che vada per il sottile... dovrebbe stare a guardare per parecchio tempo prima di scoprire il principio in base al quale agisce il robot ».

Sfortunatamente Babbage non annotò quelli che egli chiama i « semplici » dettagli della macchina, sicché non è possibile farsi una idea della sua costruzione. Però egli scrisse che « immaginava che la macchina consistesse nelle figure di due bambini che giocavano una partita, assistiti da un agnello e da un gallo. Il bambino che vinceva poteva battere le mani mentre il gallo cantava, mentre il bambino perdente poteva piangere e torcersi le mani mentre l'agnello cominciava a belare ». Una macchina per filetto meno immaginosa, presentata nel 1958 alla Fiera Industriale Portoghese di Lisbona, sghignazzava quando vinceva, piangeva quando perdeva.

Si potrebbe pensare che sia semplice programmare un calcolatore numerico per giocare il filetto o disegnare dei circuiti speciali per una macchina per questo gioco. Ciò è vero a meno che non si voglia costruire un maestro robot che vinca il massimo numero di partite contro giocatori inesperti. La difficoltà è nel prevedere come più probabilmente giocherebbe un novellino. Egli certamente non muoverebbe del tutto a caso, ma quanto sarebbe abile?

Per dare una idea delle complicazioni che sorgono, pensiamo che il novellino apra sulla casella 8. La macchina potrebbe far bene rispondendo in modo irrazionale e occupando la casella 3! Questa mossa sarebbe fatale contro un esperto, ma se il giocatore è solo modestamente abile, non è molto facile che risponda con la sua unica mossa vincente possibile, sulla casella 9. Delle sei rimanenti risposte, quattro sono disastrose. Vi sarebbe, infatti, la grossa tentazione di giocare sulla casella 4 perché la mossa porta a due promettenti trappole contro il robot. Sfortunatamente il robot può far scattare la sua trappola facendo seguito con la casella 9 e poi con la 5 alla mossa successiva. Potrebbe capitare che nel gioco reale la macchina vincessesse con più frequenza mediante questa irrequieta strategia che con un gioco sicuro, che potrebbe più probabilmente portare ad una partita patta.

Un giocatore veramente maestro, robot o umano, non solo dovrebbe conoscere le più probabili risposte del principiante, quali risultano dallo studio statistico delle precedenti partite; dovrebbe anche analizzare lo stile di gioco dell'avversario per determinare quale sorta di errori l'avversario potrebbe fare con maggior probabilità. Se il principiante migliorasse col giocare, anche ciò dovrebbe esser tenuto in considerazione. A questo punto l'umile gioco del filetto ci tuffa in questioni di probabilità e statistica tutt'altro che banali.

Appendice

Ho osservato che molti giocatori di filetto hanno l'errata impressione di non aver più nulla da imparare sul gioco per il fatto di saper giocare una strategia imbattibile. Un maestro, però, deve essere svelto nel cogliere il massimo vantaggio da una giocata sbagliata. I seguenti tre esempi, tutti di apertura laterale, chiariranno l'idea.

Apprendo con X8, se l'avversario gioca O2 la migliore risposta contro un novellino è X4 perché porta alla vittoria in quattro mosse su sei possibili per O. Egli può bloccare la trappola solo giocando O7 o O9.

Se l'avversario apre con X8 e voi rispondete con uno degli angoli in basso, per esempio O9, potete far scattare delle trappole vittoriose se egli gioca X2, X4 o X7.

Se apre con X8, una risposta di O5 può condurre ad un divertente sviluppo. Se occupa X2, potete permettergli di indicare la vostra mossa successiva in quanto è impossibile che voi giochiate senza riuscire a preparare una trappola vittoriosa.

È stato menzionato nel capitolo che la variante a pedine mobili popolare nell'antica Roma porta alla vittoria per il primo giocatore se questo occupa la casella di centro. Per i lettori interessati, le due possibili condotte di gioco obbligato sono:

(1)	$\left\{ \begin{array}{l} X \\ 5 \\ 4 \\ 9 \\ da\ 4\ a\ 7 \\ da\ 5\ a\ 8 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} O \\ 3 \\ 6 \\ 1 \\ mossa\ qualsiasi \end{array} \right.$
-----	---	---

oppure

(2)	$\left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 1 \\ 3 \\ da\ 1\ a\ 4 \\ da\ 4\ a\ 7 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 9 \\ 2 \\ mossa\ qualsiasi \end{array} \right.$
-----	--	--

Queste direttrici di gioco vincono indipendentemente dal fatto che sia permesso o no di muovere lungo le due diagonali principali, ma la prima fallisce se sono consentite mosse lungo le diagonali corte.

Curiosità

SCATOLE DI FIAMMIFERI E MACCHINE CHE IMPARANO A GIOCARE

Sapevo poco di scacchi, ma dato che sulla scacchiera c'erano solo pochi pezzi, era ovvio che il gioco era vicino al termine... Il viso [di Moxon] era di un pallore spettrale e i suoi occhi brillavano come diamanti. Vedevo il suo antagonista solo da dietro, ma era sufficiente; non mi sarebbe importato vedere il suo viso.

Questa citazione è tratta dal classico racconto di robot « Moxon's Master » di Ambrose Bierce. L'inventore Moxon ha costruito un robot che gioca a scacchi. Moxon vince una partita e il robot lo strangola.

Il racconto di Bierce riflette una paura che va crescendo. I calcolatori potranno un giorno prenderci la mano e sviluppare una volontà propria? Non si creda che questa domanda venga posta oggi solo da coloro che non capiscono i calcolatori. Prima di morire, Norbert Wiener prevedeva con crescente apprensione il giorno in cui complesse decisioni di governo sarebbero state affidate a raffinate macchine da teoria dei giochi. Prima che noi lo si sappia, ammoniva Wiener, le macchine potrebbero portarci sull'orlo di una guerra suicida.

Il maggior pericolo di comportamento imprevedibile viene dalle macchine che imparano: calcolatori che migliorano con l'esperienza. Tali macchine non fanno quello che è stato ordinato loro di fare, ma ciò che hanno *imparato* a fare. Esse raggiungono rapidamente un punto in cui il programmatore non sa più che tipo di circuiti contiene la sua macchina. All'interno, la maggior parte di questi calcolatori è costituita da dispositivi casualizzatori. Se il dispositivo è basato sul decadimento casuale degli atomi in un campione di materiale radioattivo, il comportamento della macchina non è prevedibile (ritengono la maggior parte dei fisici) neppure in linea di principio.

Molta dell'attuale ricerca sulle macchine che imparano ha a che fare con calcolatori che migliorano continuamente la loro abilità nel gioco. Alcuni lavori sono segreti (anche la guerra è considerata

alla stregua di un gioco). La prima macchina importante di questo tipo è stato un calcolatore IBM 704 programmato da Arthur L. Samuel del dipartimento di ricerca della IBM a Poughkeepsie. Nel 1959 Samuel sistemò il calcolatore in modo che non solo potesse giocare una buona partita di dama, fosse anche capace di riconsiderare le partite già fatte e modificare la sua strategia alla luce della sua esperienza. Dapprima Samuel trovò facile battere la macchina. Invece di strangolarlo, la macchina migliorò rapidamente, raggiungendo presto il punto in cui poteva superare il suo inventore in ogni partita. Per quanto mi consta, un programma del genere non è stato ancora preparato per gli scacchi, sebbene siano stati fatti diversi ingegnosi programmi per macchine da scacchi che non imparano.

Si dice che alcuni anni fa il grande maestro di scacchi Mikhail Botvinnik affermasse che sarebbe venuto il giorno in cui un calcolatore avrebbe giocato magistralmente agli scacchi. «Naturalmente è una sciocchezza», scrisse l'esperto americano di scacchi Edward Lasker in un articolo sulle macchine per scacchi nel numero di autunno 1961 della rivista *The American Chess Quarterly*. Invece era Lasker a dire sciocchezze. Un calcolatore ha tre vantaggi enormi su un avversario umano: 1) non fa mai errori di sbadataggine; 2) può analizzare delle mosse anticipate a velocità molto maggiore di quanto possa un giocatore umano; 3) può migliorare senza limiti la sua abilità.

Vi sono tutte le ragioni per aspettarsi che una macchina che impara gli scacchi arrivi un giorno, dopo aver giocato migliaia di partite con esperti, a sviluppare l'abilità di un maestro. È anche possibile programmare una macchina da scacchi in modo che giochi continuamente e furiosamente contro se stessa. La sua velocità la metterebbe in grado di acquisire in breve tempo un'esperienza molto superiore a quella di qualsiasi giocatore umano.

Non è necessario, per il lettore che voglia fare esperimenti con macchine che imparano a giocare, comprare un calcolatore elettronico. Basta che si procuri una certa quantità di scatole da fiammiferi vuote e di biglie colorate. Questo metodo per costruire una semplice macchina che apprende è una felice invenzione di Donald Michie, un biologo dell'Università di Edimburgo. In un articolo sui « procedimenti per tentativi » in *Penguin Science Survey* del 1961, vol. 2, Michie descrive una macchina che impara il « filetto » chiamata MENACE (*Matchbox Educable Naughts and Crosses Engine* = Macchina di scatole di fiammiferi addestrabile al gioco del cerchio

o croce), da lui costruita con trecento scatole di fiammiferi tipo « svedesi ».

MENACE è deliziosamente semplice nel suo funzionamento. Su ogni scatola è incollato un disegno di una possibile posizione del filetto. La macchina fa sempre la prima mossa, sicché sono richiesti solo schemi che si presentano alla macchina in mosse dispari. In ogni scatola vi sono piccole biglie di vetro di vari colori, ognuna dei quali indica un possibile gioco della macchina. Un divisorio di cartone a forma di V è incollato sul fondo di ogni scatola, sicché quando si scuote la scatola e la si inclina, le palline rotolano nella V. Il caso determina il colore della biglia che rotola nel vertice della V. Le scatole per la prima mossa contengono quattro biglie di ciascun colore, le scatole per la terza mossa contengono tre biglie di ogni colore, quelle per la quinta mossa due per ogni colore, quelle per la settima mossa hanno una sola biglia per ciascun colore.

La mossa della macchina è determinata scuotendo e inclinando una scatola, aprendo il cassetto e notando il colore della biglia « apicale » (ossia nella punta della V). Le scatole che intervengono nel gioco rimangono aperte sino alla fine del gioco. Se la macchina vince, viene ricompensata aggiungendo tre biglie del colore di quella nel vertice a ciascuna scatola aperta. Se la partita è pari, il premio è di una biglia per scatola. Se viene perduta, la macchina viene punita estraendo la biglia apicale da ogni scatola aperta. Questo sistema di premio e punizione è strettamente parallelo al modo in cui gli animali ed anche gli uomini ricevono l'insegnamento e la disciplina. È ovvio che più partite gioca il MENACE, più esso tende ad adottare linee di gioco vincenti e a eliminare quelle perdenti. Ciò lo rende in senso legittimo una macchina che apprende, anche se di un tipo estremamente semplice. Essa non fa (come anche la macchina per dama di Samuel) alcuna autoanalisi di giocate passate che le faccia immaginare nuove strategie.

Il primo torneo di Michie con MENACE consistette in 220 partite in un periodo di due giorni. In principio la macchina venne facilmente sopraffatta. Dopo diciassette partite la macchina aveva abbandonato tutte le aperture eccetto l'apertura d'angolo. Dopo la ventesima partita pareggiava con una frequenza sensibile, sicché Michie cominciò a tentare varianti fallaci nella speranza di intrappolarla in una sconfitta. Ciò rese finché la macchina imparò a fronteggiare tutte queste varianti. Quando Michie si ritirò dalla competizione, dopo aver perduto otto partite su dieci, MENACE era divenuto un giocatore magistrale.



Dato che probabilmente pochi lettori vorranno tentare di costruire una macchina che richiede trecento scatole di fiammiferi, ho progettato l'esapedone, un gioco molto più semplice che richiede solo ventiquattro scatole. Il gioco è facile da analizzare — in effetti, è banale — ma il lettore è pregato di *non* farne l'analisi. È più divertente costruire la macchina, poi imparare il gioco mentre l'impara anche la macchina.

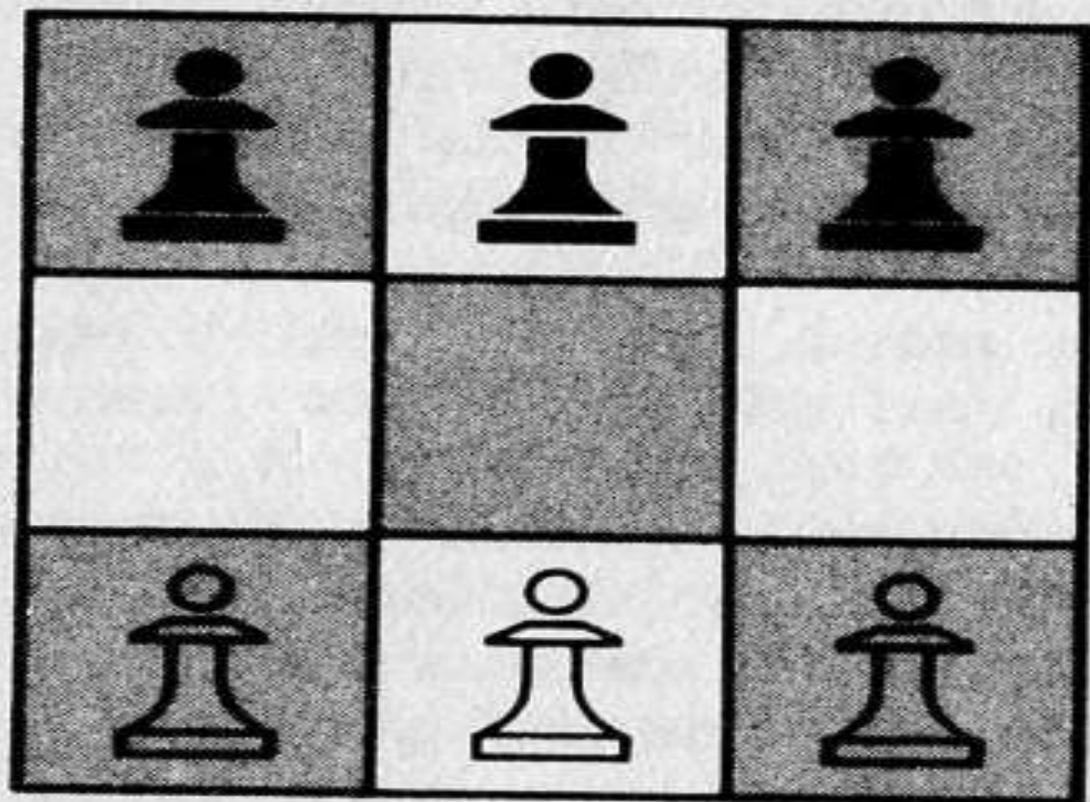


Fig. 39. Il gioco dell'esapedone.

L'esapedone viene giocato su una scacchiera di 3×3 , con tre pedoni da scacchi su ciascun lato come mostrato in fig. 39. Si possono usare monete di due valori diversi invece che pezzi di scacchi effettivi. Sono consentiti solo due tipi di mosse:

1) un pedone può procedere in avanti da un quadrato su un altro quadrato vuoto;

2) un pedone può catturare un pedone nemico muovendo di un quadrato in diagonale, a sinistra o a destra, su una casella occupata dall'avversario.

Il pezzo catturato viene rimosso dalla scacchiera. Le mosse sono le stesse di quelle fatte negli scacchi, salvo che non sono permesse mosse doppie, catture al passaggio o promozioni di pedoni che arrivano all'ultima fila di caselle.

Il gioco viene vinto in uno di questi tre modi:

1) facendo avanzare un pedone sino alla terza riga;

2) catturando tutti i pezzi nemici;

3) raggiungendo una posizione per la quale l'avversario non può muovere.

I giocatori si alternano a muovere, spostando un pezzo per volta. Una patta è chiaramente impossibile, ma non è visibile con im-

mediatezza se sia il primo o il secondo giocatore a essere in vantaggio.

Per costruire l'HER (*Hexapawn Educable Robot* = robot educabile per esapedone) occorrono ventiquattro scatole di fiammiferi vuote e un rifornimento di biglie colorate. Anche piccoli confetti in diversi colori — per esempio le lenti di cioccolato — o piccole *fiches*. Ogni scatola porta uno dei diagrammi di fig. 40. Il robot fa sempre la seconda mossa. Gli schemi marcati « 2 » rappresentano le due posizioni possibili per l'HER alla seconda mossa. Per l'apertura si può scegliere fra una mossa di centro o di estremo, ma qui viene considerata solo l'apertura di sinistra dato che quella sulla destra condurrebbe ovviamente a un'identica (anche se specularmente riflessa) linea di gioco. Gli schemi marcati « 4 » indicano le undici posizioni che si presentano all'HER alla quarta (la sua seconda) mossa. Gli schemi « 6 » sono le undici posizioni alla sesta (e ultima) mossa. (Ho incluso in queste posizioni anche le immagini speculari per rendere più facile il lavoro, altrimenti basterebbero diciannove scatole).



Dentro ogni scatola si pone una sola pallina il cui colore corrisponde a una delle frecce sul disegno. Il robot è ora pronto a giocare. Ogni mossa lecita è rappresentata da una freccia; il robot può perciò fare tutte le possibili mosse e solo mosse lecite. Non ha strategia; in effetti è un idiota.

Il processo di insegnamento è il seguente. Fate la prima mossa e prendete la scatola che presenta la posizione della scacchiera. Agitate la scatola, chiudete gli occhi, aprite il cassetto ed estraete una biglia. Chiudete il cassetto, deponete la scatola, disponete la biglia sulla scatola. Aprite gli occhi, annotate il colore della biglia, trovate la freccia corrispondente e fate la relativa mossa. Ora è il vostro turno di nuovo. Continuate questo procedimento sino alla fine del gioco. Se vince il robot, riponete al loro posto le biglie e fate un'altra partita. Se perde, punitelo confiscando solo la biglia che rappresenta la sua *ultima* mossa. Rimettete a posto le altre biglie e fate un'altra partita. Se trovate una scatola vuota (il che avviene raramente), ciò significa che la macchina non ha mosse che non siano fatali e abbandona. In questo caso ritirate la biglia della mossa precedente.

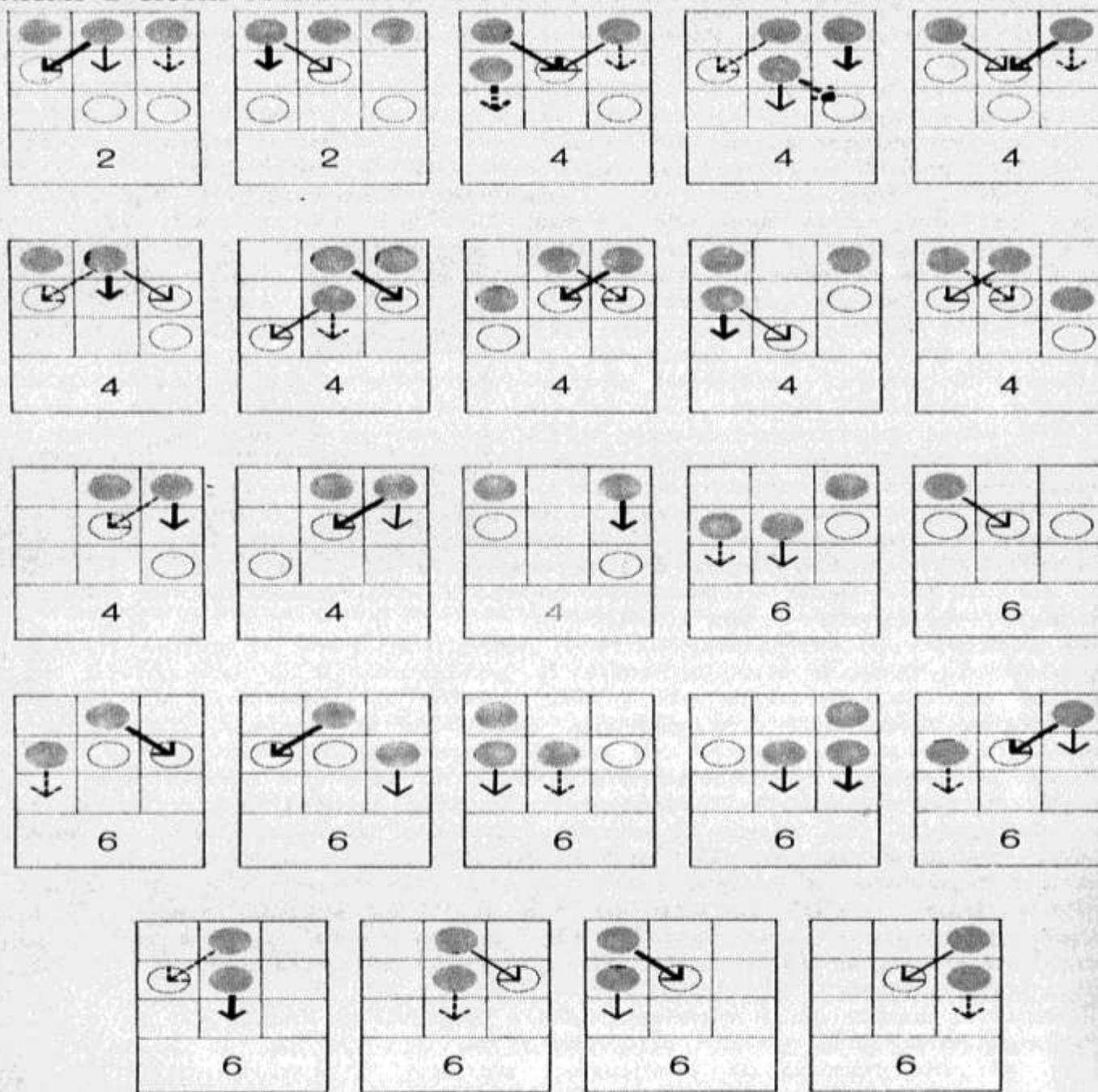


Fig. 40. Contrassegni delle scatole di fiammiferi dell'HER (i quattro diversi tipi di frecce rappresentano i quattro diversi colori).

Tenete il conto delle vincite e delle perdite in modo da poter fare un diagramma delle prime cinquanta partite. La fig. 41 mostra i risultati di un torneo di cinquanta partite. Dopo trentasei partite (comprese le undici sconfitte del robot) esso ha imparato a giocare un gioco perfetto. Il sistema di punizione è progettato per rendere minimo il tempo necessario ad apprendere un gioco perfetto, ma il tempo varia con l'abilità dell'avversario della macchina. Quanto migliore è l'avversario, tanto più rapidamente la macchina impara.

IL ROBOT DIVENTA UN PERFETTO GIOCATORE
DOPO AVER PERSO 11 PARTITE

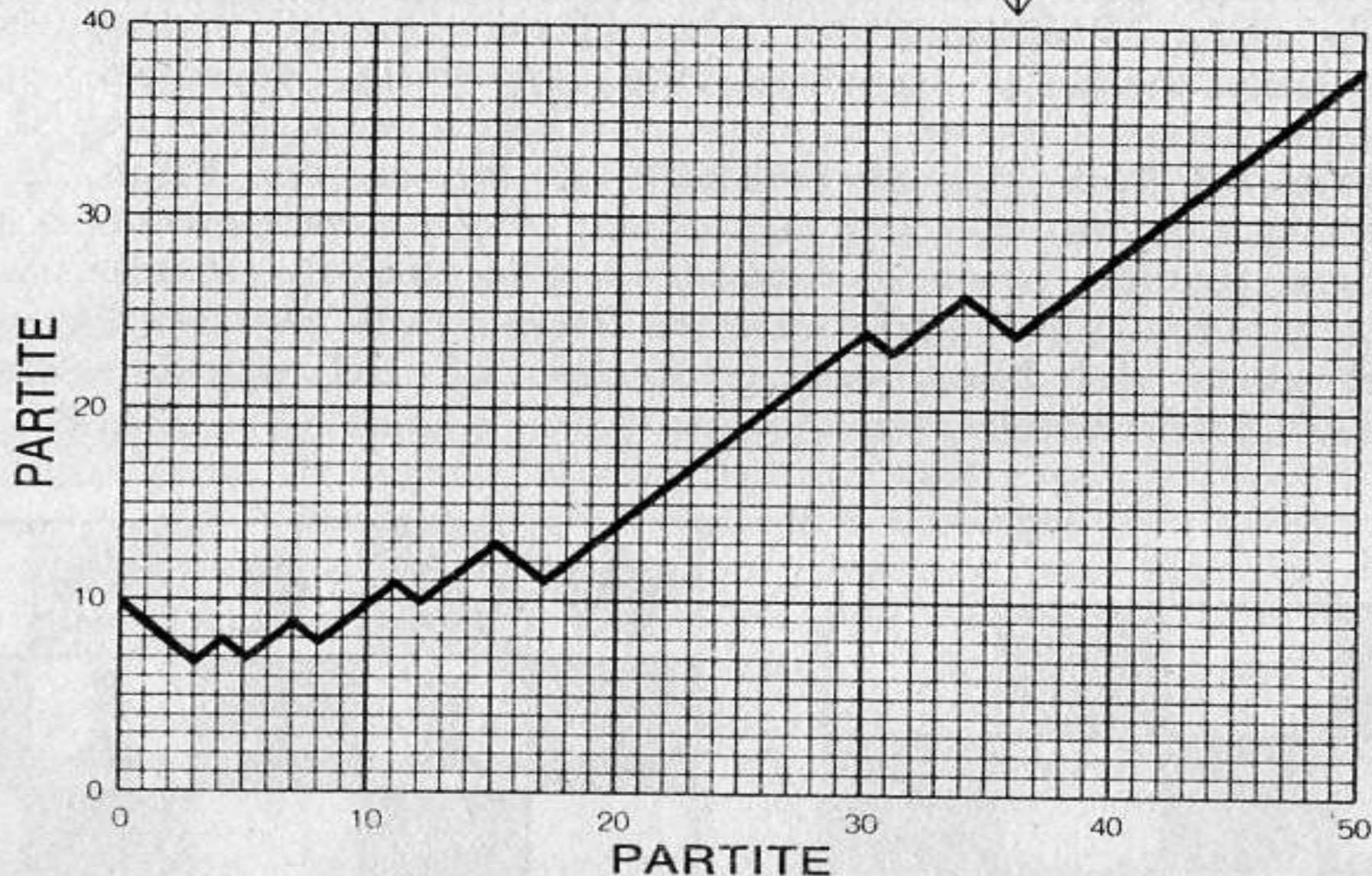


Fig. 41. Curva di apprendimento dell'HER nelle prime cinquanta partite (i tratti inclinati in basso indicano sconfitte, quelli in alto, vittorie).

Il robot può essere progettato in altri modi. Per esempio, se l'intento è di ottimizzare il numero di giocate che la macchina vince in un torneo, poniamo, di venticinque partite, può esser meglio ricompensarla (oltre che punirla) aggiungendo una biglia del colore adatto in ogni scatola, quando la macchina vince. Le mosse cattive non saranno eliminate tanto rapidamente, ma essa sarà meno propensa a fare mosse cattive. Un progetto interessante sarebbe costruire un secondo robot, HIM (*Hexapawn Instructable Matchboxes* = scatoline addestrabili all'esapedone), organizzato con un diverso sistema di ricompensa e punizione ma ugualmente incompetente all'inizio del torneo. Entrambe le macchine dovrebbero essere ingrandite in modo da poter fare sia le prime che le seconde mosse. Si potrebbe allora far giocare il torneo fra HIM ed HER, alternando la prima mossa per vedere quale macchina vincerebbe il maggior numero di partite su cinquanta.

Robot analoghi possono essere costruiti facilmente per altri giochi. Stuart C. Hight, direttore degli studi di ricerca nei Bell Telephone Laboratories a Whippany, nel New Jersey, ha di recente costruito una macchina a scatoline che apprende, chiamata NIMBLE (*Nim Box Logic Engine* = macchina logica a scatole per il Nim) per giocare il Nim con tre colonne di tre gettoni l'una. Il robot gioca sia per primo che per secondo e viene ricompensato o punito dopo ogni partita. NIMBLE richiedeva solo diciotto scatole da fiammiferi e giocava quasi perfettamente dopo trenta partite. Per un'analisi del gioco del Nim, vedere il cap. 15 del primo volume di *Enigmi e giochi matematici*.

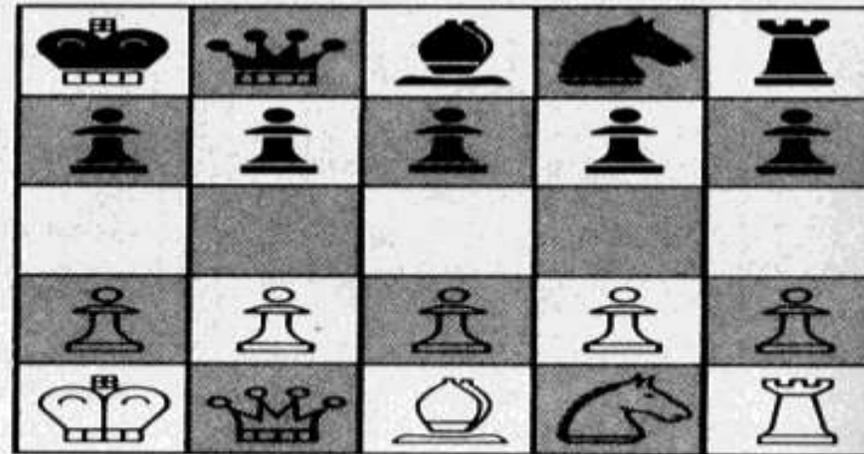
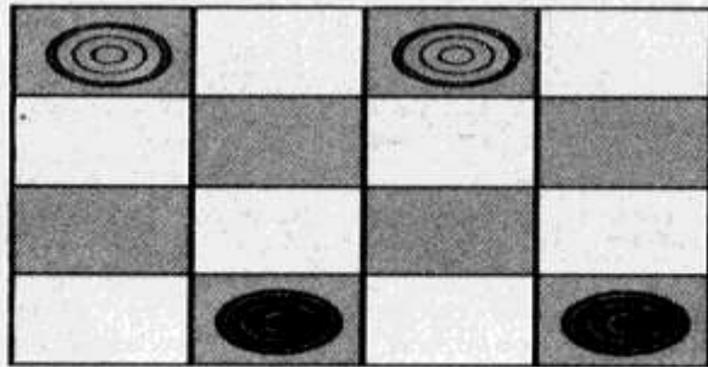


Fig. 42. È possibile costruire una macchina a scatoline per la minidama (a sinistra), ma non per i miniscacchi (a destra).

Riducendo la grandezza della scacchiera, la complessità di molti dei giochi conosciuti può essere diminuita sino a renderli accessibili al robot a scatoline. Il gioco del Go, per esempio, può essere giocato sulle intersezioni di una scacchiera per dama di 2×2 . La più piccola scacchiera non banale per dama è mostrata in fig. 42. Non dovrebbe essere difficile costruire una macchina a scatoline che impari a giocarla. I lettori non inclini a farlo, possono divertirsi ad analizzare il gioco. La vittoria è sicura per uno dei due avversari, o due giocatori perfetti farebbero sempre patta?

Quando gli scacchi vengono ridotti alla più piccola scacchiera su cui sono ancora possibili tutte le mosse ammesse dalle regole, come mostrato in fig. 42, la complessità supera di gran lunga le

capacità di una macchina a scatoline. In effetti, non mi è stato possibile determinare quale giocatore, ammesso che ci sia, abbia il vantaggio. Il miniscacchi è raccomandabile per quegli esperti di calcolatori che volessero programmare una macchina semplificata che impara gli scacchi e per tutti i giocatori di scacchi che gradiscono fare una rapida partitina durante i cinque minuti del caffè.

Appendice

Molti lettori che hanno fatto esperimenti con le macchine che apprendono fatte di scatole di fiammiferi sono stati così gentili da scrivermi. L. R. Tanner, del Westminster College, Salt Lake, Utah, ha fatto buon uso dell'HER facendosi rilasciare una licenza di gioco alla festa del *College*. La macchina era progettata per imparare solo con le ricompense, in modo che i clienti potevano sempre avere una possibilità (anche se sempre minore) di vincita ed i premi ai vincitori venivano aumentati di valore con il progredire di HER.

Svariati lettori hanno costruito due macchine a scatoline per metterle una contro l'altra. John Chambers, di Toronto, ha chiamato la sua coppia THEM (*Two-way Hexapawn Educable Machine* = doppia macchina a scatoline che impara l'esapedone). Kenneth W. Wiszowaty, insegnante di scienze alla scuola elementare Philip Rogers, di Chicago, mi ha mandato una relazione di un suo alunno della settima classe, Andrea Weiland, sulle sue due macchine che avevano giocato l'una contro l'altra sinché una aveva imparato a vincere sempre. John House, di Waterville, Ohio, ha chiamato la sua seconda macchina RAT (*Relentless Auto-learning Tyrant* = tiranno autodidatta inflessibile) e ha riferito che dopo diciotto partite RAT ha ammesso che HER avrebbe vinto tutte le partite successive.

Peter J. Sandiford, direttore della ricerca operativa della Trans-Canada Air Lines a Montreal, ha chiamato le sue macchine Mark I e Mark II. Come si aspettava, ci son volute diciotto partite perché Mark I imparasse a vincere sempre e Mark II imparasse a giocare l'azione maggiormente ritardatrice della sconfitta. Allora Sandiford ideò un piano diabolico. Organizzò le cose in modo che due studenti, un giovane ed una ragazza del circolo matematico della locale scuola superiore, che non sapevano nulla del gioco, giocassero l'esapedone fra loro dopo aver letto una breve descrizione delle regole. «Ogni concorrente era solo in una stanza», scrive

Sandiford, « e indicava le sue mosse a un arbitro. A loro insaputa l'arbitro riferiva ad una terza stanza dove erano gli accomodanti calcolatori e i segnapunti. I giocatori credevano di giocare fra loro con un controllo a distanza, per così dire, mentre in realtà giocavano indipendentemente con i calcolatori. Essi giocarono alternativamente il bianco e il nero in giocate successive. Con molta confusione e malcelata ilarità noi, nel mezzo, tentavamo di far funzionare i calcolatori, tenere in fase il gioco e segnare i punti ».

Agli studenti fu chiesto di commentare man mano le proprie mosse e quelle dell'avversario. Ecco alcuni esempi di osservazioni:

« È la cosa più sicura da fare per non venire mangiato; è quasi certa la vittoria ».

« Mi ha mangiato, ma io ho mangiato lui. Se fa quello che mi aspetto, mangerà il mio pedone, ma alla prossima mossa lo blocco ».

« Sono molto stupido! ».

« Bella mossa! Penso di esser battuto ».

« Non credo che stia realmente pensando. Ora non dovrebbe fare più errori di distrazione ».

« Bella partita. Ora si sta accorgendo del mio gioco ».

« Ora che si è messo a pensare, c'è più competizione ».

« Mossa molto sorprendente... non vedeva che avrei vinto se avesse mosso in avanti? ».

« Il mio avversario ha giocato bene. Penso di aver capito per primo lo spirito del gioco ».

« Quando poi gli studenti vennero messi di fronte alle macchine con cui avevano giocato, stentaronò a credere », scrive Sandiford, « di non aver combattuto con una persona reale ».

Richard L. Sites, del Massachusetts Institute of Technology, scrisse un programma FORTRAN per un IBM 1620 per insegnarli a giocare l'ottopedone, una versione 4×4 dell'esapedone che comincia con quattro pedoni bianchi sulla prima riga e quattro pedoni neri sulla quarta. Egli riferisce che il primo giocatore ha la vittoria sicura con un'apertura d'angolo. Al momento in cui scrivevo l'articolo, il suo programma non aveva ancora esaminato le aperture di centro.

Judy Gomberg, di Maplewod nel New Jersey, dopo aver giocato contro una macchina a scatoline da lei costruita, riferisce di aver imparato l'esapedone più rapidamente della macchina perché « ogni volta che la macchina perdeva io prendevo un confetto e lo mangiavo ».

Robert A. Ellis, del Laboratorio di Calcolo dei Ballistics Research Laboratories, al Poligono Sperimentale di Aberdeen nel Maryland,

mi ha parlato di un programma, da lui scritto per un calcolatore digitale, che applica la tecnica di apprendimento delle scatole di fiammiferi ad una macchina per imparare il filetto. La macchina gioca dapprima un gioco stupido, scegliendo le mosse a caso e viene facilmente battuta da avversari umani. Poi viene consentito alla macchina di giocare duemila partite contro se stessa (cosa che essa fa in due o tre minuti, imparando man mano). Dopo di ciò la macchina gioca con eccellente strategia contro avversari umani.

La mia difesa a favore della osservazione di Botvinnik che i calcolatori un giorno giocheranno a scacchi da maestri ha provocato una quantità di lettere irate da parte di giocatori di scacchi. Un grande maestro mi assicurò che Botvinnik parlava in senso ironico. Il lettore interessato può giudicare da sé leggendo una traduzione del discorso di Botvinnik (apparso originariamente su *Komsomolskaya Pravda* del 3 gennaio 1961) in *The Best in Chess* curato da I. A. Horowitz e Jack Straley Battell (Dutton New York, 1965), alle pp. 63-69. « Verrà il tempo », conclude Botvinnik, « in cui giocatori meccanici di scacchi riceveranno il titolo di Gran Maestro Internazionale... e sarà necessario promuovere due campionati mondiali, uno per gli uomini, uno per i robot. Il secondo torneo, naturalmente, non sarà fra le macchine, ma fra i loro costruttori e programmisti ».

Un eccellente racconto di fantascienza proprio su un torneo del genere, « The 64-Square Madhouse » di Fritz Leiber è comparso su *If* del maggio 1962 ed è stato in seguito ristampato in *A Pail of Air* (Ballantine, New York, 1964) di Leiber. Lord Dunsany, fra l'altro, ha lasciato due memorabili descrizioni di partite di scacchi giocate contro calcolatori. Nel breve racconto « The Three Sailor's Gambit », in *The Last Book of Wonder*, la macchina è un cristallo magico. Nel suo romanzo *The Last Revolution* del 1951, sulla rivoluzione del calcolatore, c'è un calcolatore che impara. La descrizione della prima partita fra il narratore ed il calcolatore, nel secondo capitolo, è certamente uno dei più divertenti resoconti mai scritti di una partita di scacchi.

La reazione ostile dei giocatori maestri di scacchi all'idea che i calcolatori possano un giorno giocare magistralmente agli scacchi è facile da capire; essa è stata ben analizzata da Paul Armer in un rapporto del giugno 1962 su *Attitudes Toward Intelligent Machines*.

La reazione dei giocatori di scacchi è particolarmente divertente. Uno può aver la meglio su un calcolatore scrivendo musica o poesia di alta qualità, o dipingendo con grande arte, ma gli scacchi non

sono sostanzialmente differenti dal filetto, salvo che nella loro enorme complessità, e l'imparare a giocare bene è precisamente il tipo di cosa che i calcolatori è prevedibile possano fare in modo eccellente.

Le macchine che giocano a dama magistralmente verranno senza dubbio per prime. La dama è ormai analizzata così completamente, che le partite fra campioni terminano quasi sempre pari e per dare interesse al gioco le prime tre mosse ora vengono scelte a caso. Scrivendo sulla applicazione della programmazione dinamica alla determinazione del gioco ottimale negli scacchi e nella dama, su *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 53 (febbraio 1965), pp. 244-47, Richard Bellman dice che « si può con sicurezza predire che fra pochi anni la dama sarà un gioco completamente decidibile ».

Gli scacchi, naturalmente, sono di un diverso ordine di complessità. Si intuisce che occorrerà molto tempo prima che si possa (così dice una vecchia barzelletta in veste moderna) giocare la prima mossa di una partita di scacchi contro un calcolatore ed avere, dopo un periodo di furiosi calcoli, la risposta scritta dal calcolatore: « Mi arrendo ». Nel 1958 alcuni matematici responsabili predissero che entro dieci anni i calcolatori avrebbero giocato a scacchi da maestri, ma questa si è dimostrata una previsione fortemente ottimistica. Tigran Petrosian, quando divenne campione del mondo di scacchi, fu citato dal *New York Times* (24 maggio 1963) per aver espresso dei dubbi sul fatto che i calcolatori avrebbero potuto giocare a scacchi da maestri entro i prossimi quindici o venti anni.

L'esapedone può essere ampliato semplicemente facendo più larga la scacchiera ma mantenendo la profondità di tre righe. John R. Brown, nel suo articolo « Extendapawn - An Inductive Analysis » (in *Mathematics Magazine*, vol. 38, novembre 1965, pp. 286-99), fa un'analisi completa di questo gioco. Se n è il numero delle colonne, il gioco presenta una vittoria certa per il giocatore che fa la prima mossa quando la cifra finale di n è 1, 4, 5, 7 o 8. Altrimenti è il secondo giocatore che ha la vittoria certa.

Risposte

Il gioco di dama sulla scacchiera di 4×4 termina con una patta se entrambe le parti giocano nel miglior modo possibile. Come mostrato in fig. 43, il Nero può scegliere fra tre aperture: (1) C5, (2) C6, (3) D6.

La prima apertura conduce alla sconfitta immediata quando il Bianco risponde con A3. La seconda apertura conduce ad una patta qualunque sia la risposta del Bianco. La terza apertura è la più forte per il Nero. Essa dà la vittoria se il Bianco risponde con A3 o B3. Ma il Bianco può anche rispondere con B4 e pattare.

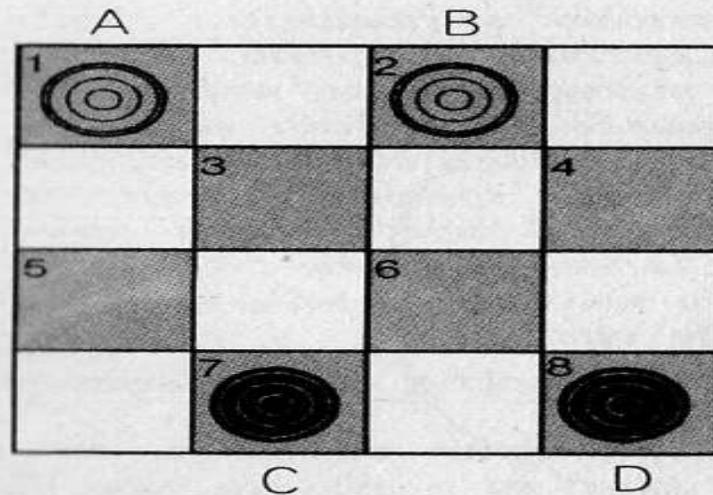


Fig. 43 Il gioco della minidama è pari se giocato razionalmente.

Nei riguardi del Go semplificato 3×3 , ricordando anche come gioco adatto ad una macchina per imparare, Jay Eliasberg, vice presidente dell'American Go Association, mi assicura che il primo giocatore ha la vittoria sicura se inizia giocando sul punto centrale della scacchiera e continua razionalmente.

Il gioco di dama 4×4 è banale, ma quando si amplia la scacchiera a 5×5 il risultato è impegnativo e sorprendente. Robert L. Caswell, chimico al Dipartimento di Stato dell'Agricoltura, mi ha scritto su questo minigioco che dice essergli stato proposto già prima. Il gioco comincia con tre pedine bianche sulla prima fila e tre nere sulla quinta. Valgono tutte le regole usuali, con la prima mossa al nero. Si potrebbe pensare che il gioco sia pari se giocato razionalmente, ma l'assenza di « angoli doppi » in cui le dame possono muoversi avanti e indietro lo rende improbabile. Caswell ha scoperto che non solo uno dei contendenti ha la vittoria sicura, ma che, se il perdente gioca bene, la mossa finale è spettacolare. Piuttosto che sciupare il divertimento, lascio al lettore l'analisi del gioco e la decisione di quale sia il giocatore che vince sempre.



Matematica
«un po' insolita»

CURVE DI AMPIEZZA COSTANTE

Quando si deve spostare da un punto a un altro un oggetto estremamente pesante, può darsi che quello di farlo muovere su ruote non sia il sistema più pratico. Gli assali potrebbero piegarsi o spezzarsi sotto il carico. Invece si deve sistemare l'oggetto su una piattaforma che a sua volta poggi su rulli cilindrici. La piattaforma viene spinta in avanti e i cilindri che restano indietro vengono ripresi e riportati sul davanti.

Ovviamente un oggetto spostato in questo modo, sopra una superficie piana orizzontale, non sobbalza mentre si muove sui rulli. La semplice ragione è che i rulli cilindrici hanno una sezione circolare e il cerchio è una curva chiusa che possiede quella che si può definire « ampiezza costante ». Se una curva chiusa convessa è situata fra due linee parallele e queste vengono spostate parallelamente a se stesse sino a toccare la curva, la distanza fra le parallele è l'« ampiezza » della curva (in direzione ortogonale alle parallele). Un'ellisse non ha, è chiaro, la stessa ampiezza in tutte le direzioni. Una piattaforma che si spostasse su cilindri ellittici oscillerebbe in su e giù durante il movimento. Dato che il cerchio ha sempre la stessa ampiezza, può ruotare fra due rette parallele senza alterarne la distanza.

Il cerchio è la sola curva chiusa di ampiezza costante? La maggior parte della gente direbbe di sì, dando così un lampante esempio di quanto può andar fuori strada la comune intuizione matematica. In effetti vi è una infinità di curve del genere. Ognuna di esse può esser presa come sezione di un rullo che farebbe avanzare una piattaforma con la stessa facilità di un cilindro a sezione circolare! Il non riconoscere l'esistenza di tali curve può avere e ha avuto conseguenze disastrose nell'industria. Per darne un esempio si può pensare che la forma circolare della chiglia cilindrica di un sommergibile in costruzione possa esser controllata semplicemente misurando la massima ampiezza in tutte le sezioni. Come verrà chiarito subito, uno scafo del genere può risultare mostruosamente sbilenco e tuttavia superare ancora un tale controllo. È precisamente per questa ragione che la circolarità dello scafo di

un sommergibile viene sempre controllata applicando delle sagome curve circolari.

La più semplice curva non circolare di ampiezza costante è stata denominata triangolo di Reuleaux in onore di Franz Reuleaux (1829-1905), ingegnere e matematico che insegnò alla Reale Scuola Tecnica Superiore di Berlino. La stessa curva era nota a matematici precedenti, ma Reuleaux fu il primo a dimostrare la sua proprietà di avere ampiezza costante. La costruzione è facile. Si traccia prima un triangolo equilatero, ABC (fig. 91). Con la punta di un

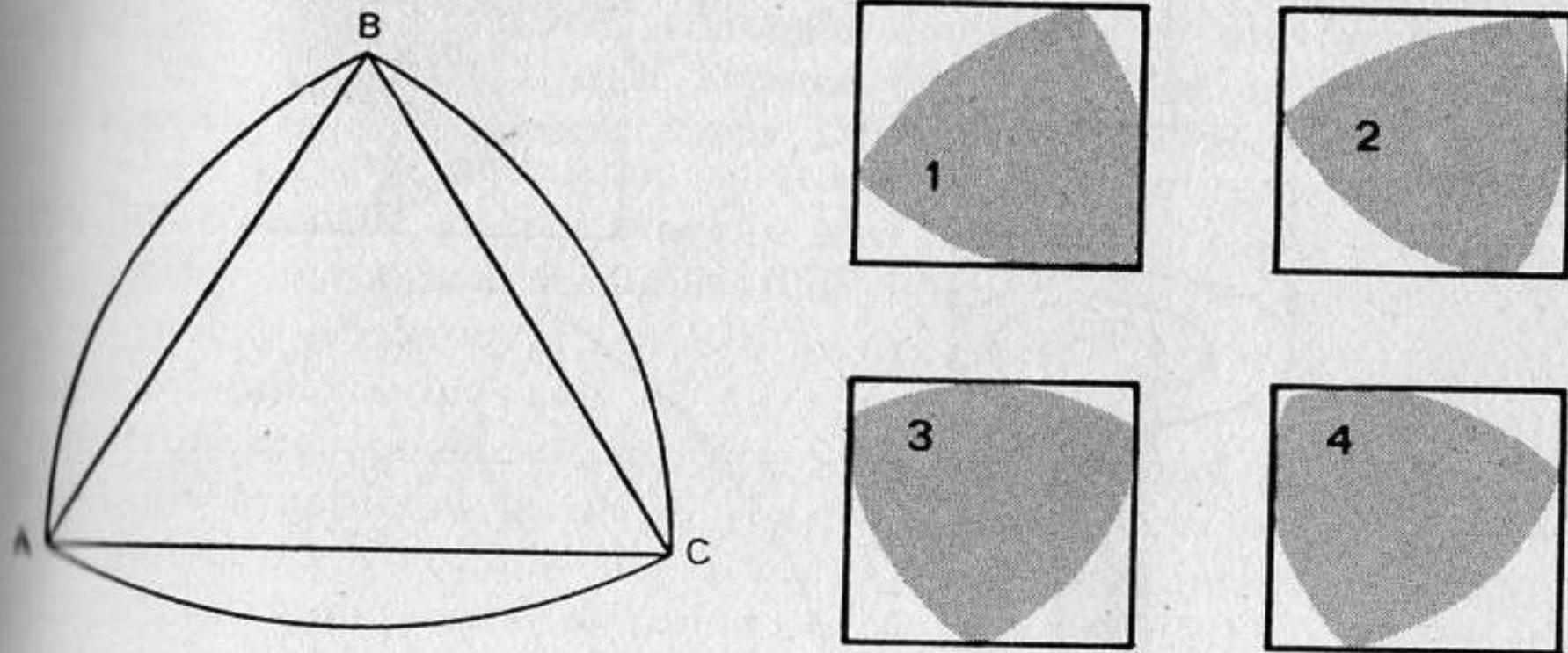


Fig. 91. Costruzione del triangolo di Reuleaux (a sinistra) e triangolo di Reuleaux che ruota in un quadrato (a destra).

Se una curva di ampiezza costante è delimitata da due coppie di rette parallele perpendicolari fra loro, il contorno forma necessariamente un quadrato. Come il cerchio o qualsiasi altra curva di ampiezza costante, il triangolo di Reuleaux ruota esattamente all'interno del quadrato, mantenendosi sempre in contatto con tutti e quattro i lati del quadrato (fig. 91 a destra). Se il lettore ritaglia un triangolo di Reuleaux di cartone e lo fa ruotare all'interno di un'apertura quadrata di opportune dimensioni ritagliata in un altro pezzo di cartone, vedrà che è proprio così.

Quando il triangolo di Reuleaux ruota nell'interno di un quadrato, ogni vertice segue un percorso che è pressappoco un quadrato; la

sola deviazione è nei vertici, che risultano leggermente arrotondati. Il triangolo di Reuleaux ha molti usi in meccanica, ma nessuno è tanto bizzarro quanto quello che deriva dalla sua proprietà. Nel 1914 Harry James Watts, un ingegnere inglese che allora viveva a Turtle Creek, in Pennsylvania, inventò una punta rotante basata sul triangolo di Reuleaux e capace di forare dei fori quadrati!

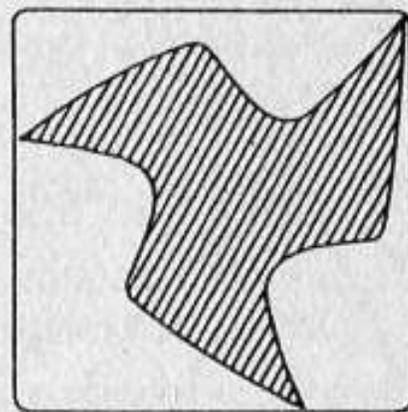
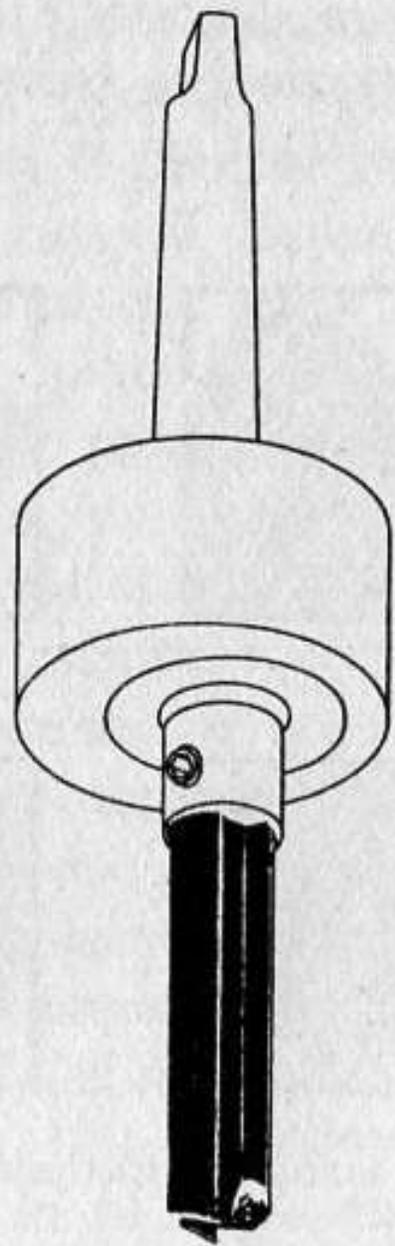


Fig. 92. Mandrino e punta di Watts (a sinistra) e sezione della fresa nel foro (a destra).

Dal 1916 queste curiose perforatrici sono state prodotte dalla Watts Brothers Tool Works a Wilmerding, in Pennsylvania. « Abbiamo tutti sentito parlare di chiavi inglesi sinistrorse, vasche da bagno in pelliccia, pettini per calvi », è scritto in uno dei loro volantini illustrativi. « Abbiamo qualificato queste cose come ridicole e rifiutato di credere che potesse mai accadere una cosa del genere e proprio ora viene fuori un attrezzo che fa dei fori quadrati ».

La punta da trapano per fori quadrati di Watts è illustrata in fig. 92. A destra è una sezione della punta mentre ruota all'interno del foro che sta ricavando. Sul materiale da forare viene piazzata prima una piastra di guida in metallo con un'apertura quadrata. Quando la fresa ruota all'interno della piastra di guida, gli spigoli della fresa scavano un foro quadrato nel materiale. Come si

può vedere, la fresa è semplicemente un triangolo di Reuleaux incavato sui tre lati in modo da formare gli spigoli di taglio e permettere l'uscita del truciolo. Dato che il centro della fresa si sposta con la rotazione, è necessario consentire questo moto eccentrico nel mandrino che porta l'utensile. Un congegno brevettato, il « mandrino fluttuante », come lo ha chiamato la ditta, risolve il problema.

Il triangolo di Reuleaux è la curva di ampiezza costante che ha la minima area per una ampiezza data (l'area della sezione è $\frac{1}{2} [\pi - \sqrt{3}] w^2$), ove w è l'ampiezza). Gli angoli sono di 120° , i minori possibili per una tale curva. Possono venire arrotondati allungando ogni lato del triangolo equilatero di una stessa quantità oltre il vertice a ogni estremo (fig. 93). Con la punta di un compasso in A si traccia l'arco DI; poi si apre il compasso e di

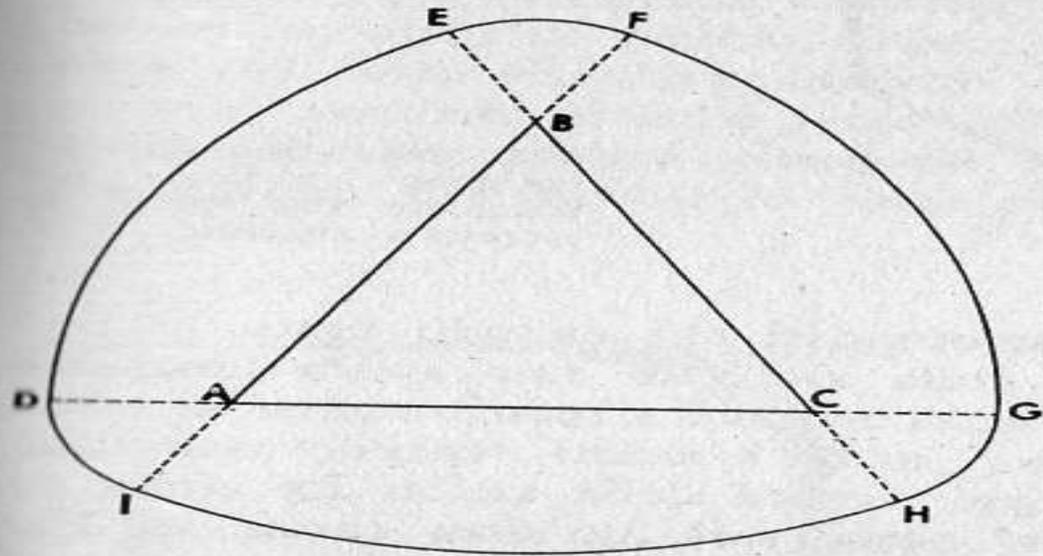


Fig. 93. Curva di ampiezza costante simmetrica ad angoli arrotondati.

traccia FG. Si fa la stessa cosa negli altri vertici. La curva risultante ha un'ampiezza pari alla somma di questi due raggi. Ciò la rende ovviamente una curva di ampiezza costante. Si ottengono con un procedimento simile altre curve simmetriche di ampiezza costante partendo da un pentagono regolare (o da un qualsiasi poligono regolare con numero dispari di lati).

È possibile anche disegnare curve asimmetriche ad ampiezza costante. Si può cominciare con un poligono a stella irregolare (esso avrà necessariamente un numero dispari di punte) come la stella a sette punte tracciata in nero nella fig. 94. Tutti i segmenti di

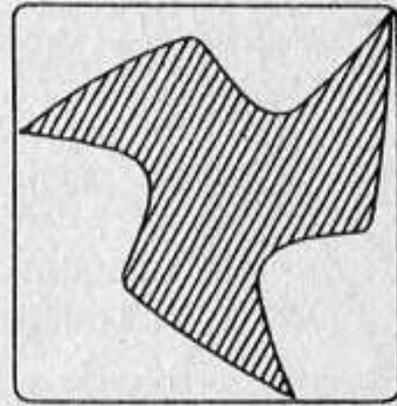
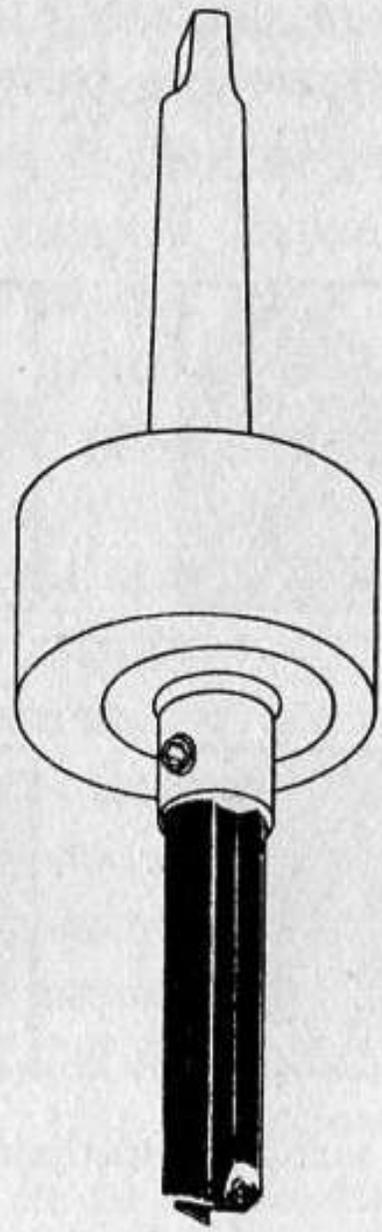


Fig. 92. Mandrino e punta di Watts (a sinistra) e sezione della fresa nel foro (a destra).

rette devono essere della stessa lunghezza. Posta la punta di un compasso in ciascun vertice della stella si collega i due vertici opposti con un arco. Dato che tutti gli archi hanno lo stesso raggio, la curva che ne risulta (tracciata in grigio) avrà ampiezza costante.

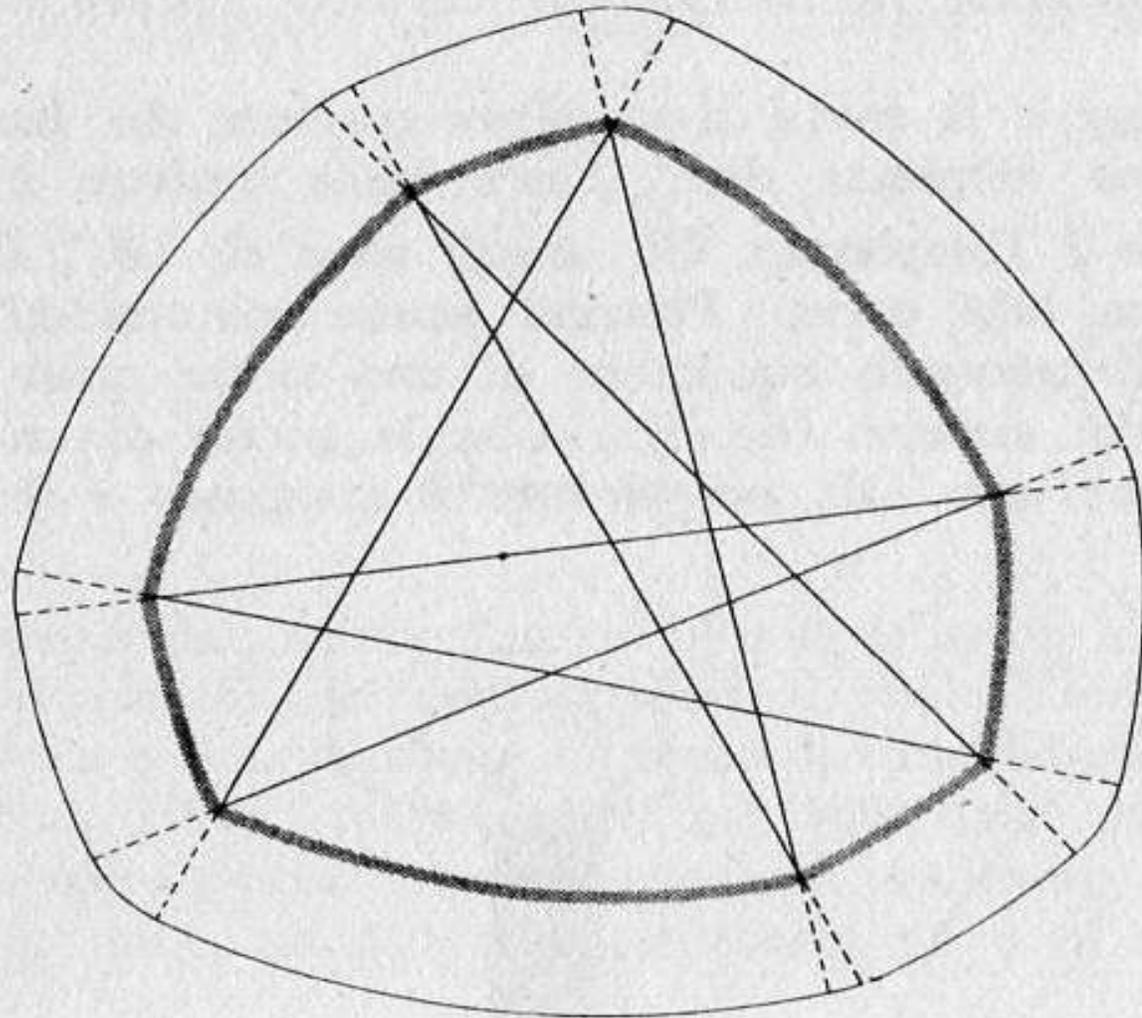


Fig. 94. Metodo del poligono stellare per disegnare una curva ad ampiezza costante.

I suoi angoli possono essere arrotondati col metodo usato in precedenza. Si prolungano i lati della stella di una stessa lunghezza (segmenti tratteggiati) in ogni vertice e poi si congiungono le estremità dei prolungamenti mediante archi tracciati tenendo una delle punte del compasso fissa in ogni vertice della stella. La curva ad angoli arrotondati, mostrata in nero, sarà un'altra curva ad ampiezza costante.

La fig. 95 mostra un altro metodo. Si disegna un numero di rette a piacere, tutte intersecantisi reciprocamente. Ogni arco viene tracciato ponendo la punta del compasso nell'intersezione delle due rette che delimitano l'arco. Si comincia con un arco qualsiasi, poi si procede lungo la curva, unendo ogni arco al precedente. Operando con cura, la curva si chiuderà e sarà ad ampiezza costante. (Dimostrare che la curva deve esser chiusa e di ampiezza costante è un esercizio interessante e non difficile). Le curve precedenti erano fatte di archi appartenenti a non più di due cerchi differenti, ma le curve tracciate in questo modo possono avere archi appartenenti a quanti si voglia cerchi differenti.

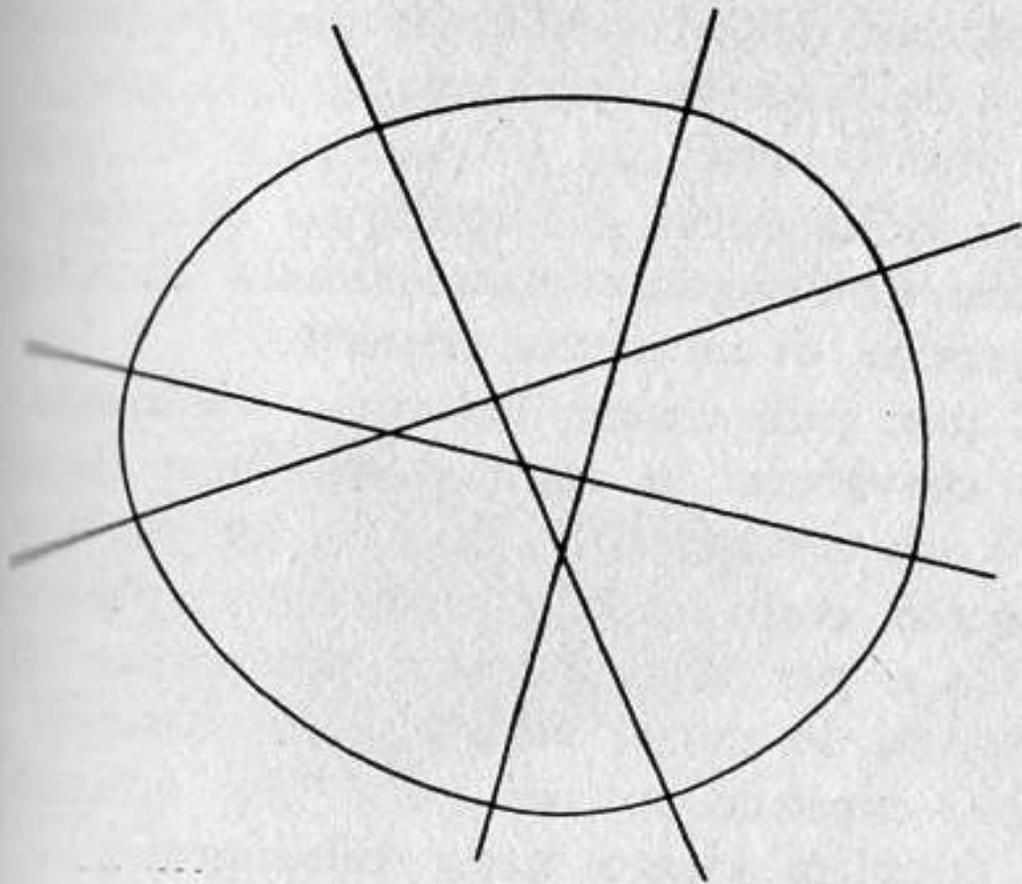


Fig. 95. Metodo delle linee incrociate.

Una curva di ampiezza costante non deve necessariamente esser formata da archi di cerchio. Infatti, si può tracciare una curva convessa del tutto arbitraria dall'alto al basso di un quadrato e tangente al suo lato sinistro (arco ABC fig. 96) e questa curva sarà il lato sinistro di una curva ad ampiezza costante univocamente determinata. Per trovare la parte mancante, si traccia un gran nu-

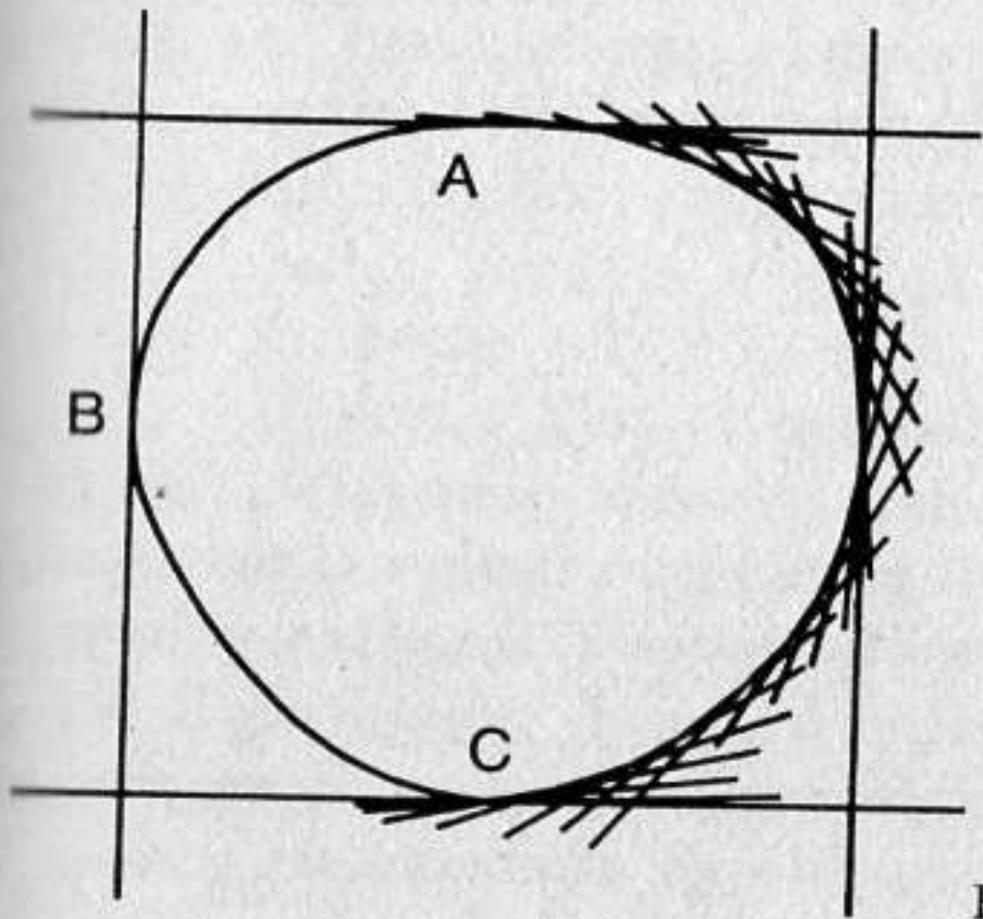


Fig. 96. Curva arbitraria e sue tangenti.

mero di rette, ognuna parallela a una tangente dell'arco ABC e a una distanza uguale al lato del quadrato. Questo può esser fatto rapidamente usando i due lati di un righello, che abbia la larghezza eguale al lato del quadrato originario. Disporre un bordo

del righello in modo che sia tangente all'arco ABC in uno dei suoi punti, poi usare il lato opposto del righello per tracciare la parallela. Si ripete la costruzione in molti punti, da un estremo all'altro dell'arco ABC. La parte mancante della curva è l'involuppo di queste rette. In questo modo si ottiene una sagoma approssimata di una infinita varietà di curve asimmetriche di ampiezza costante.

Occorre dire che l'arco ABC non può essere del tutto arbitrario. Parlando grosso modo, la sua curvatura in ogni punto non deve essere inferiore alla curvatura di un cerchio di raggio uguale al lato del quadrato. Non può, per esempio, comprendere segmenti rettilinei. Per una enunciazione più precisa e per dimostrazioni dettagliate di molti teoremi elementari riguardanti le curve ad ampiezza costante, si rimanda il lettore all'eccellente capitolo su tali curve nel volume di Hans Rademacher e Otto Toeplitz citato nella bibliografia.

Se si hanno i mezzi e l'abilità per lavorare il legno, ci si può divertire a realizzare un certo numero di rulli di legno con sezioni formate da diverse curve di ampiezza costante. La maggior parte della gente resterà strabiliata al vedere un grosso libro traslare orizzontalmente sopra rulli sbilenchi del genere senza ondeggiare in su e giù. Un modo più semplice di preparare simili dispositivi è di ritagliare dal cartone due curve di ampiezza costante e inchiodarle alle estremità di un bastone di legno lungo circa quindici cm. Non occorre che le curve siano della stessa forma e non importa dove esattamente viene messo ogni chiodo purché esso sia abbastanza vicino a quello che si può ritenere essere il « centro » della curva. Disponete orizzontalmente sopra le curve collegate una grossa scatola, vuota e leggera, reggendola ai bordi e fatela rullare avanti e indietro. La stecca sobbalzerà in su e giù alle estremità, ma la scatola si sposterà dolcemente come farebbe su rulli circolari!

Le proprietà delle curve di ampiezza costante sono state ampiamente esaminate. Una sorprendente proprietà, non facile a dimostrarsi, è che i perimetri di tutte le curve aventi la stessa ampiezza n hanno la stessa lunghezza. Dato che un cerchio è una di tali curve, il perimetro di una qualsiasi curva di ampiezza costante n deve essere πn , uguale alla circonferenza di un cerchio di diametro n .

L'analogo tridimensionale di una curva di ampiezza costante è il solido di ampiezza costante. Una sfera non è l'unico solido che può ruotare entro un cubo, toccando sempre tutte e sei le facce del cubo; questa proprietà è condivisa da tutti i solidi di ampiezza costante. L'esempio più semplice di un solido non sferico di questo tipo è generato ruotando il triangolo di Reuleaux attorno ad uno

dei suoi assi di simmetria (fig. 97 a sinistra). Ma ce ne sono infiniti altri. I solidi di ampiezza costante che hanno i minimi volumi sono derivati dal tetraedro regolare all'incirca allo stesso modo in cui il triangolo di Reuleaux deriva dal triangolo equilatero. Prima si aggiungono delle calotte sferiche su ogni faccia del tetraedro, poi

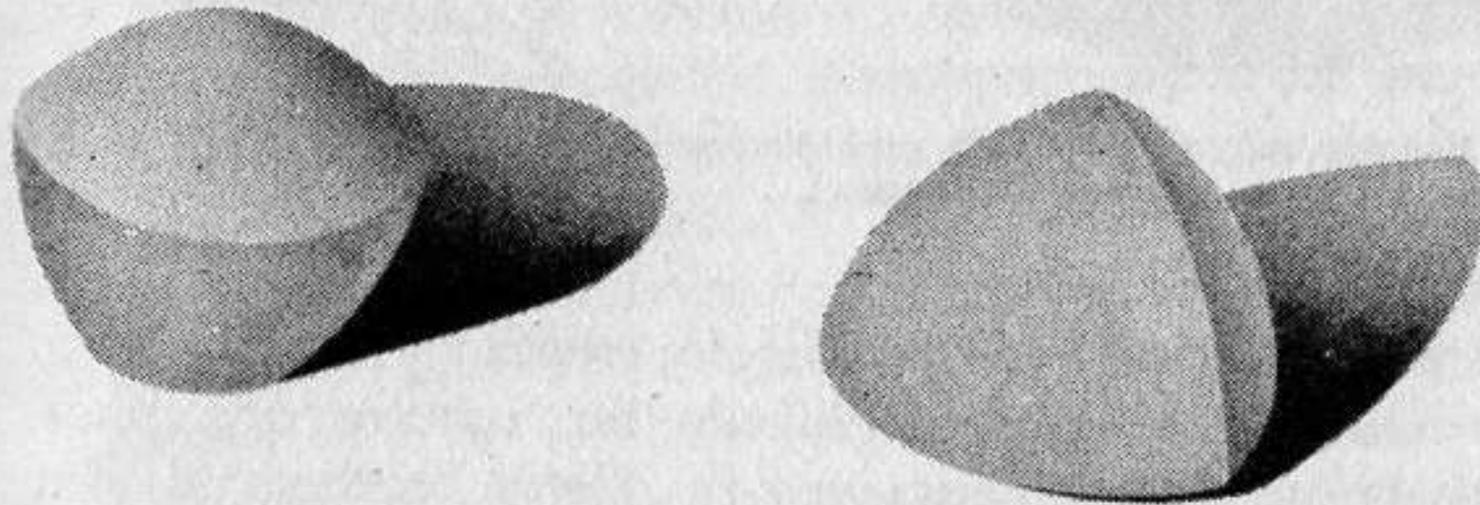


Fig. 97. Due solidi ad ampiezza costante.

è necessario arrotondare leggermente tre spigoli. Questi tre spigoli possono formare un triangolo o uscire dallo stesso vertice. Il solido di fig. 97 a destra è un tetraedro curvo di ampiezza costante.

è necessario arrotondare leggermente tre spigoli. Questi tre spigoli possono formare un triangolo o uscire dallo stesso vertice. Il solido di fig. 97 a destra è un tetraedro curvo di ampiezza costante.

Dato che tutte le curve della stessa ampiezza costante hanno lo stesso perimetro, si potrebbe supporre che tutti i solidi aventi la stessa ampiezza costante abbiano la stessa superficie. Ma non è così. È stato dimostrato, invece, da Hermann Minkowski (il matematico polacco che ha dato tanti importanti contributi alla teoria della relatività) che tutte le ombre dei solidi a ampiezza costante (quando i raggi proiettanti sono paralleli e l'ombra cade su un piano perpendicolare ai raggi) danno curve ad ampiezza costante. Tutte queste ombre hanno uguale perimetro (π moltiplicato per l'ampiezza).

Michael Goldberg, un ingegnere di Washington, ha scritto molti articoli sulle curve e solidi di ampiezza costante ed è noto per essere il principale esperto del suo paese sull'argomento. Egli ha introdotto il termine « rotore » per una qualsiasi figura che possa esser fatta ruotare all'interno di un poligono o poliedro rimanendo sempre a contatto con ogni lato o faccia.

Il triangolo di Reuleaux è, come abbiamo visto, il rotore di minima area nel quadrato. Il rotore di minima area per il triangolo equilatero è mostrato in fig. 98 a sinistra. Questa figura a forma di lente (naturalmente non è una curva ad ampiezza costante) è formata da due archi di 60° di cerchio avente raggio uguale all'altezza del triangolo. Notare che, ruotando, i suoi spigoli trac-

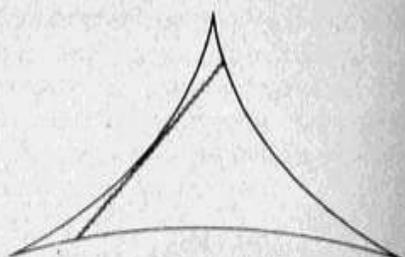
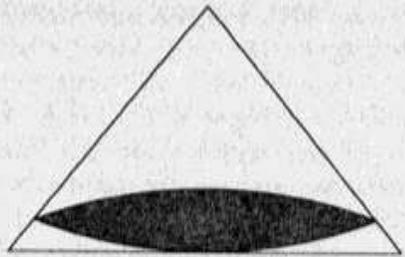


Fig. 98. Rotore di minima area nel triangolo equilatero (a sinistra) e segmento rotante nella curva deltoide (a destra).

ciano l'intero contorno del triangolo, senza arrotondarne i vertici. Ragioni meccaniche rendono difficile far ruotare una punta perforante basata su questa figura, ma la Watts Brothers fa altre punte, basate su rotori per poligoni regolari di ordine più alto che ricavano fori ad angoli netti aventi forme di pentagoni, esagoni e persino ottagoni. Nello spazio a tre dimensioni, Goldberg ha mostrato che vi sono rotori non sferici per il tetraedro e l'ottaedro regolari, come per il cubo, ma che non ve ne sono per il dodecaedro e l'icosaedro regolari. Quasi nessun lavoro è stato fatto sui rotori in spazi a più di tre dimensioni.

Strettamente collegato con la teoria dei rotori è un famoso problema, detto problema dell'ago di Kakeya dal nome del matematico giapponese Sôichi Kakeya, che per primo lo ha posto nel 1917. Il problema è il seguente: qual è la figura piana di minor area nella quale un segmento di retta unitario l può ruotare per 360° ? La rotazione può ovviamente esser fatta all'interno di un cerchio di diametro unitario, ma questo non è certo di minima area.

Per molti anni i matematici hanno pensato che la risposta fosse la curva deltoide mostrata in fig. 98 a destra, che ha un'area esattamente metà del cerchio unitario. (La deltoide è la curva tracciata da un punto sulla circonferenza di un cerchio che rotola all'interno di un cerchio più grande, quando il diametro del cerchio piccolo è un terzo o due terzi di quello grande). Se si spezza uno stecchino alla dimensione del segmento mostrato, si vede sperimentalmente che esso può esser fatto ruotare all'interno della deltoide come una specie di rotore unidimensionale. Notare come le sue estremità rimangono sempre sul perimetro della deltoide.

Nel 1927, dieci anni dopo che Kakeya aveva posto il suo problema, il matematico russo Abram Samoilovitch Besicovitch (che allora viveva a Copenaghen) fece scoppiare una bomba. Egli di-

mostrò che il problema non aveva soluzione. Più precisamente, egli dimostrò che la risposta al problema di Kakeya è che *non c'è* una figura di area minima. L'area può esser resa piccola quanto si vuole. Immaginiamo un segmento di retta che si estende dalla Terra alla Luna. Si può farlo ruotare di 360° entro un'area piccola quanto l'area di un francobollo. Se questa sembra troppo grande possiamo ridurla all'area del naso di Lincoln su un francobollo.

La dimostrazione di Besicovitch è troppo complicata per esporla qui e inoltre il suo dominio di rotazione non è quello che i topologi chiamano semplicemente connesso.

Per i lettori che vogliono lavorare su questo tipo di problemi ne porremo uno molto più facile: qual è la minima area *convessa* in cui un segmento di retta unitario può ruotare di 360° ? (Una figura convessa è quella in cui un segmento di retta, che congiunge due punti qualsiasi, giace interamente nella figura. I quadrati e i cerchi sono convessi; le croci greche e le lune crescenti non lo sono).

Appendice

Sebbene Watts sia stato il primo ad ottenere brevetti sul procedimento per realizzare fori quadrati con punte a triangolo di Reuleaux, il procedimento, a quanto sembra, era conosciuto prima. Derek Beck, di Londra, scrisse di aver incontrato un tale che ricordava di aver usato punte del genere per praticare fori quadrati quando era apprendista meccanico nel 1902 e che allora tale pratica sembrava normale. Non sono però stato capace di sapere qualcosa sulla storia della tecnica prima del brevetto di Watts nel 1917.

Risposte

Qual è la minima area convessa in cui un segmento di retta di lunghezza unitaria può esser fatta ruotare di 360° ? La risposta è: un triangolo equilatero di altezza 1. (L'area è uguale a $\sqrt{3}/3$).

Qualsiasi figura in cui il segmento può essere ruotato deve ovviamente avere un'ampiezza almeno uguale a 1. Di tutte le figure di ampiezza 1, il triangolo equilatero di altezza 1 ha l'area minore. (Per una dimostrazione di questa proprietà si rinvia il lettore al volume di I. M. Yaglom e V. G. Boltyanskii citato in bibliografia).

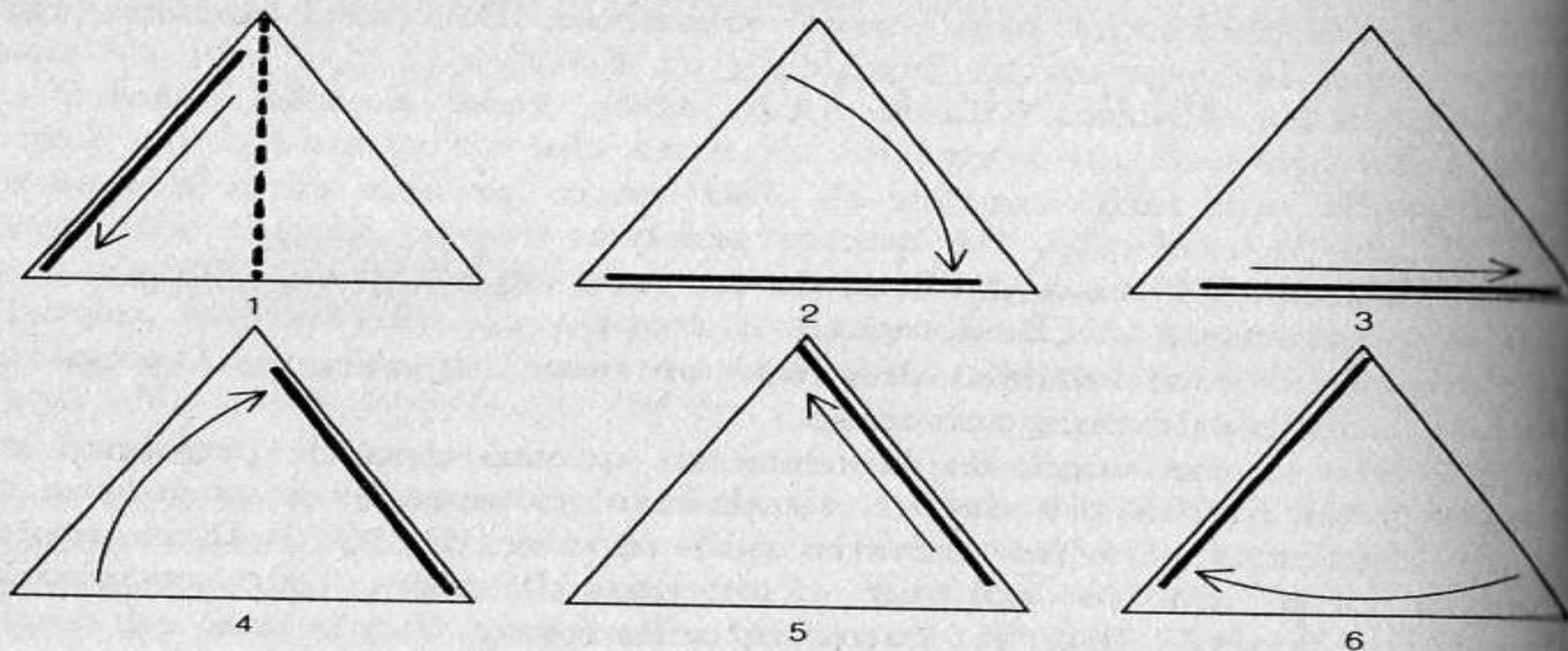


Fig. 99. La risposta al problema della rotazione dell'ago.

È facile vedere che un segmento unitario può, in effetti, esser ruotato all'interno di un tale triangolo (fig. 99).

La curva deltoide era ritenuta essere la minima area semplicemente connessa che risolvesse il problema sino al 1963 quando un'area più piccola fu scoperta indipendentemente da Melvin Bloom e I. J. Schoenberg. (Ved. H. S. M. Coxeter, *Twelve Geometric Essays*, Southern Illinois University Press, Carbondale e Edwardsville, 1968, p. 231).

FLATLAND

La satira prende spesso la forma di un racconto fantastico in cui sono messi in caricatura le abitudini e le istituzioni umane da una razza di creature non umane o da una società o un mondo con sue particolari caratteristiche o leggi fisiche. Due sono i tentativi notevoli di fondare una satira del genere su una società di creature bidimensionali muoventisi in un piano. Nessuno dei due tentativi può dirsi un capolavoro letterario, ma da un punto di vista matematico entrambi sono curiosi e divertenti.

Flatland pubblicato per la prima volta nel 1884 è il primo e più conosciuto dei due. Fu scritto da Edwin Abbott Abbott, un sacerdote londinese direttore didattico e autore di molti libri di scuola. Il frontespizio della prima edizione porta lo pseudonimo di A. Square (A. Quadrato). Il narratore del libro è un quadrato nel senso letterale della parola. Possiede un solo occhio in uno dei quattro vertici. (Non è spiegato come facesse, senza piedi, a muoversi sulla superficie di Flatland e a scrivere il libro senza mani).

La Flatland di Abbott è una superficie simile ad una carta geografica, su cui scivolano i suoi abitanti. Essi hanno bordi luminosi e un'altezza infinitesima nel senso della coordinata verticale, o terza dimensione, ma sono completamente inconsapevoli della loro altezza e non possono in alcun modo visualizzarla. La società è rigidamente stratificata (fig. 60). Al livello più basso sono le donne: semplici segmenti rettilinei, con un occhio all'estremità, come un ago. Dall'occhio della donna emana una luce visibile, ma questo non succede dall'altra sua estremità, sicché una donna può rendersi invisibile semplicemente girandosi di schiena. Se un abitante di Flatland si incontra inavvertitamente con l'aguzzo posteriore di una donna, l'incontro può essergli fatale. Per evitare un simile guaio, le donne devono per legge rendersi sempre visibili con una perpetua oscillazione della loro estremità posteriore. Nelle donne sposate a uomini di alto rango si tratta di una «ondulazione ritmica» e «ben modulata». Le donne di classi inferiori cercano di imitarle ma di rado riescono a far meglio di «un semplice monotono ondeggiamento, analogo a quello di un pendolo».

I soldati e i lavoratori di Flatland sono triangoli isosceli con basi

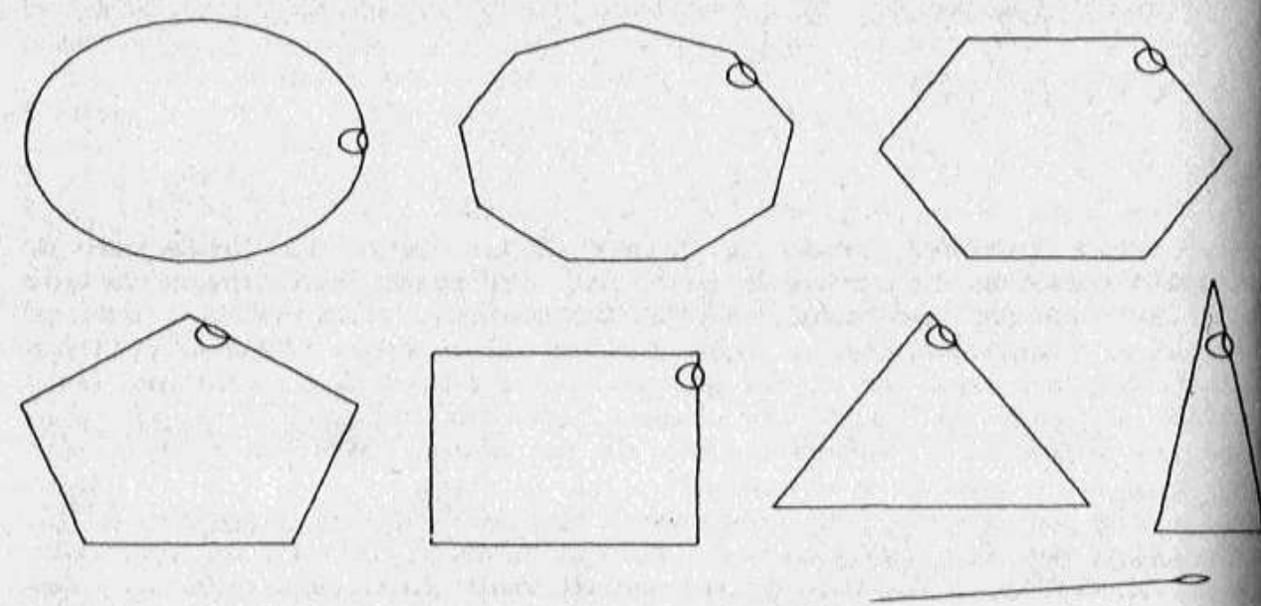


Fig. 60. Gli abitanti di Flatland in ordine di rango sociale.

estremamente corte e vertice opposto alla base molto acuto. I triangoli equilateri costituiscono la classe media. I professionisti sono quadrati e pentagoni. Le classi elevate cominciano dagli esagoni e il numero di lati aumenta col crescere del rango nella scala sociale, sinché le loro sagome divengono indistinguibili da cerchi. I cerchi, che sono al vertice della gerarchia, sono i governanti e i sacerdoti di Flatland.

In sogno, il quadrato narratore visita Lineland, un mondo unidimensionale, nel quale non riesce a convincere il re della realtà dello spazio bidimensionale. A sua volta il quadrato riceve un visitatore da Spaceland — una sfera che lo inizia ai misteri del trispazio sollevandolo al di sopra di Flatland in modo che esso possa guardare giù dentro l'interno della sua casa pentagonale. Ritornato a Flatland, il quadrato tenta di predicare il vangelo del trispazio, ma viene ritenuto matto; viene arrestato per le sue idee e il racconto finisce con la sua condanna alla prigione.

La sfera era entrata in Flatland muovendosi lentamente attraverso il piano sinché la sua sezione trasversale aveva raggiunto la figura piana di massima superficie. È facile vedere che questa sezione è un cerchio di raggio uguale al raggio della sfera. Supponiamo che invece di una sfera fosse stato un cubo ad entrare in Flatland. Qual è la

sezione trasversale piana di massima area che un cubo di lato unitario può raggiungere? Ovviamente il cubo può inclinare il suo corpo di un angolo qualsiasi nell'attraversare il piano.

Un lavoro di fantascienza bidimensionale più ambizioso di quello di Abbott — in realtà un romanzo completo di 181 pagine — è *An Episode of Flatland* di Charles Howard Hinton, pubblicato a Londra nel 1907. Hinton era il figlio di James Hinton, eminente chirurgo otiatra a Londra, amico di George Eliot e autore di *The Mystery of Pain* ed altri libri molto noti. Il giovane Charles studiò matematica ad Oxford, sposò Mary Boole (una delle cinque figlie di George Boole, il logico) e si sistemò negli Stati Uniti. Insegnò matematica all'Università di Princeton ed all'Università del Minnesota. Quando morì, nel 1907, era esaminatore all'Ufficio Brevetti degli Stati Uniti.

Un lungo necrologio sul *Sun* di New York (5 maggio 1907, p. 8) fu scritto da Gelett Burgess. Burgess ricorda una occasione in cui il suo amico Hinton assisteva ad una partita di rugby e un forestiero tentò di sgraffignare un fiore dall'occhiello del suo bavero. Hinton lo agguantò e lo scaraventò al di sopra di una siepe vicina. Nel 1897 Hinton ebbe un momento di fama per la sua invenzione di un lanciatore automatico per *baseball*. (Per i particolari, vedi *Harper's Weekly*, vol. 41, 20 marzo 1897, pp. 301-2). Esso lanciava le palle mediante cariche di polvere da sparo e poteva essere regolato in modo da effettuare lanci di qualsiasi velocità e traiettoria. La squadra di Princeton si allenò con esso per qualche tempo, ma, dopo alcuni incidenti, i battitori ebbero paura di affrontare la macchina.

Hinton era maggiormente noto come autore di libri e articoli sulla quarta dimensione. Sviluppò un metodo per costruire modelli di strutture quadridimensionali (mediante sezioni tridimensionali), usando centinaia di piccoli cubi, contrassegnati e colorati in un modo esposto dettagliatamente nei suoi due libri più importanti, *Fourth Dimension* e *A New Era of Thought*. Lavorando con questi cubi per molti anni, sosteneva Hinton, era riuscito in realtà a pensare a quattro dimensioni. Insegnò il metodo alla cognata Alicia Boole quando essa aveva diciotto anni. Sebbene non avesse seguito corsi regolari di matematica, la ragazza sviluppò rapidamente una notevole capacità di intuizione della geometria quadridimensionale e in seguito fece delle notevoli scoperte in tale campo. Si veda H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Mac-Millan, New York, 1948, pp. 258-9, per la storia della sua insolita carriera. La moglie di Sebastian, figlio di Hinton, è Carmelita Chase Hinton, fondatrice e ex-direttrice della Putney School nel Vermont.

Nel costruire la sua Flatland, che egli chiamò Astria, Hinton adottò un approccio più ingegnoso di quello di Abbott. Invece di far circolare liberamente le sue creature sulla superficie di un piano le dispose in piedi, per così dire, sul bordo di un enorme cerchio. Se disponete delle monete di diverse dimensioni su una tavola e le fate scivolare in senso circolare, vi riuscirà facile immaginare un sole piatto attorno al quale orbitano dei pianeti circolari piatti



Fig. 61. Astria, il piano bidimensionale di Charles Hinton.

La gravità si comporta come nello spazio, salvo che nel piano la sua forza varia naturalmente con l'inverso della distanza anziché con l'inverso del quadrato della distanza.

Il pianeta Astria è rappresentato in fig. 61. La direzione (indicata dalla freccia) in cui esso ruota è chiamata est, quella opposta ovest. Non c'è nord e sud, ma solo sopra e sotto. I corpi degli Astriani hanno una struttura complicata, ma per evitare di entrare in dettagli anatomici Hinton li rappresenta schematicamente come triangoli rettangoli (fig. 62). Come gli abitanti della Flatland di Abbott, gli Astriani hanno un solo occhio. (A quanto pare nessuno dei due scrittori prese in considerazione la possibilità di introdurre la visione bidimensionale comportando un paio d'occhi ognuno con una retina unidimensionale). A differenza dei loro colleghi di Flatland, hanno braccia e gambe. Per sorpassarsi l'un l'altro, due Astriani devono ovviamente pie-

garsi sotto o sopra, come farebbero due acrobati su una corda. Tutti gli Astriani maschi nascono rivolti verso est, tutte le donne rivolte ad ovest, e mantengono questo orientamento sino alla morte perché è ovvio che non v'è modo per un Astriano di «rivoltarsi»

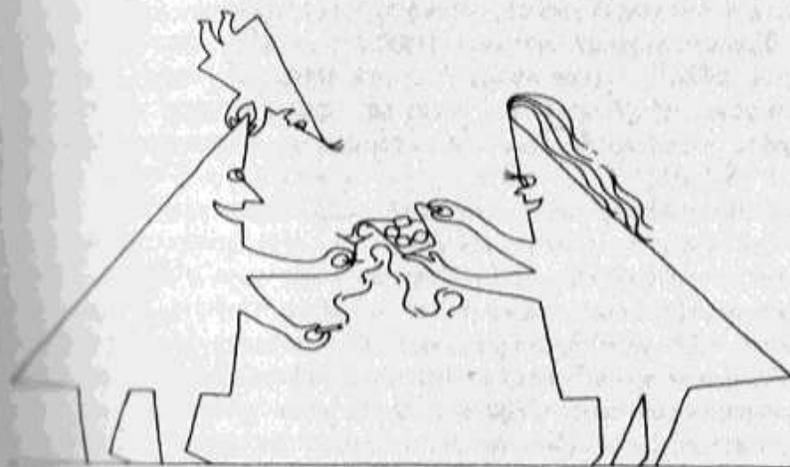


Fig. 62. Vita di famiglia fra gli Astriani.

in modo da divenire la propria immagine speculare. Per vedere dietro di sé un Astriano deve piegarsi all'indietro, mettersi a testa all'ingiù o usare uno specchio. Il metodo dello specchio è il più conveniente; per questa ragione le case e le costruzioni degli Astriani sono ben provviste di specchi. Per baciare suo figlio un Astriano lo deve tenere capovolto.

La regione abitata dell'Astria era originariamente divisa fra i civilizzati Unni all'est e i barbari Sciti all'ovest. Gli Sciti avevano un grande vantaggio in guerra: i loro guerrieri potevano colpire gli Unni dal di dietro, mentre gli Unni potevano rispondere solo col solito metodo di tirare all'indietro. Come risultato gli Sciti avevano respinto gli Unni verso est sino a ridurli in uno stretto territorio sul bordo del Mar Bianco.

Il progresso della scienza aveva salvato gli Unni dall'estinzione. I loro astronomi, osservando le eclissi ed altri fenomeni, si convinsero della rotondità del loro pianeta. Uno studio delle maree del Mar Bianco li mise in grado di dedurre l'esistenza di un continente antipodale. Una scelta schiera di Unni navigò sul Mar Bianco ed attraversò il nuovo continente in un viaggio di cento anni durante il quale ogni albero trovato sul percorso dovette essere o superato passandovi sopra o dovette essere abbattuto. I figli e le

figlie che sopravvissero alla prova costruirono nuove navi per attraversare il Mar Nero. Gli Sciti, colti di sorpresa, furono presto sopraffatti perché ora erano gli Unni ad attaccare dal di dietro. Fu stabilito un governo mondiale e cominciò un'era di pace. Tutto ciò è lo sfondo storico che fa da palcoscenico al racconto.

Risparmierò al lettore i dettagli del melodrammatico intreccio bidimensionale del libro. Esso segue la tradizione delle prime fantasie socialiste con l'attacco alla plutocrazia in nome di una società altruisticamente programmata. C'è una storia piuttosto comune d'amore fra Laura Cartright, bella figlia del ricco e potente Segretario di Stato, e Harold Wall, il bello (nel modo « piano » d'intendere) e innamorato proletario. Al centro dell'intreccio è una minacciosa nota di disastro: l'avvicinarsi di Ardea, un altro pianeta che si teme possa cambiare l'orbita di Astria in un'ellisse così eccentrica da rendere il clima alternativamente troppo caldo e freddo per poter consentire la vita. Il governo inizia un vasto programma di rifugi, scavando ampie caverne sotterranee e raccogliendo in esse grandi provviste per la sopravvivenza delle classi più elevate.

Il fato temuto viene allontanato dalle teorie matematiche dello zio di Laura, Hugh Miller, un eccentrico vecchio scapolo che vive sulla Montagna Solitaria. Miller (un Hinton appena mascherato) è il solo uomo del pianeta che crede in una terza dimensione. Egli si è convinto che tutti gli oggetti hanno un leggero spessore lungo una terza coordinata; che essi scivolano sulla superficie liscia di ciò che egli chiama « l'essere laterale ». Lavorando su modelli è stato capace di risvegliare in se stesso un senso delle forme trispaziali. È giunto a capire di essere in effetti un uomo trispaziale che dirige un corpo bispaziale.

« L'esistenza stessa si estende illimitata, profonda, da entrambi i lati di questo essere laterale », Miller dice in un eloquente discorso ai capi di Astria. « Rendetevene conto... e non guardate mai più all'azzurro arco del cielo senza un nuovo senso di mistero. Per quanto lontano voi spingiate il vostro sguardo in quelle infinite profondità esso non fa che scivolare lungo l'essere che si estende in profondità in una direzione che non conoscete.

E sapendo questo, qualcosa del vecchio senso di meraviglia per il cielo ci raggiunge, perché le costellazioni non riempiono più lo spazio intero con una interminabile ripetizione di identità, ma vi dà la possibilità di un'improvvisa e meravigliosa intuizione di essere come quelli sognati nei vecchi tempi, solo che potessimo conoscere quello che si trova da ogni lato di tutto il visibile ».

Se vi fosse qualche mezzo meccanico per toccare o collegarsi alla

superficie dell'« essere laterale », sarebbe possibile alterare la traiettoria di Astria in modo tale da sfuggire all'influsso del pianeta in avvicinamento. Non esiste un metodo del genere. Ma dato che il vero « io » è tridimensionale, esso può possedere un tale potere. Il vecchio propone uno sforzo di massa in ciò che oggi viene chiamata psicocinetica, il potere del pensiero di influenzare il moto degli oggetti. Il piano viene realizzato con successo. Uno sforzo concertato di psicocinetica da parte di tutti perturba l'orbita di Astria proprio quanto basta per allontanare la catastrofe. La scienza, armata della nuova conoscenza del trispazio, inizia un grande balzo in avanti.

È divertente meditare sulla fisica bidimensionale e sui tipi di semplici dispositivi meccanici che sarebbero realizzabili in un mondo piano. Hinton fa notare altrove (in un saggio su « A plane World ») che le case di Astria non possono avere più di un'apertura. Quando la porta anteriore è aperta, le finestre e la porta posteriore devono essere chiuse per evitare che la casa crolli.

Un tubo o condotta di qualsiasi tipo è impossibile: come potrebbero essere unite le sue pareti senza ostruire il passaggio? Le funi non possono essere annodate. (È stato provato rigorosamente che le linee chiuse possono essere annodate solo nel trispazio, ma le superfici sferiche possono essere annodate solo in un quadrispazio, la superficie di un'ipersfera solo in un pentaspazio, e così via). Ganci, leve, accoppiamenti, tenaglie e pendoli possono essere usati, come anche cunei e piani inclinati. Ma le ruote con assali sono fuori questione. Sarebbe possibile un rozzo gruppo di trasmissione racchiudendo parzialmente ogni ruota in un bordo curvo. Si possono elaborare dei metodi per far muovere imbarcazioni a remi; gli aerei dovrebbero volare come gli uccelli battendo le ali. I pesci piatti non avrebbero che poche difficoltà a remigare nell'acqua con delle pinne appropriatamente conformate. Il liquore potrebbe essere contenuto in bottiglie e versato in bicchieri ma senza dubbio avrebbe un sapore... piatto. Gli oggetti pesanti potrebbero essere trasportati facendoli rotolare su cerchi, analogamente agli oggetti tridimensionali che vengono fatti rotolare su cilindri.

Il metodo astriano per muovere gli oggetti serve ad introdurre un problema deliziosamente sconcertante inviatomi recentemente da Allan B. Calhmer, un lettore di Billerica, nel Massachusetts. La fig. 63 mostra un carro piatto astriano, lungo 3 metri, che viene spostato lungo un percorso rettilineo mediante tre cerchi. I cerchi sono sempre esattamente a 1 metro di distanza fra loro da centro a centro. Appena raggiunta la posizione mostrata, il cerchio poste-

riore viene raccolto da un Astriano dal di dietro e passato ad un compagno sul davanti, che lo dispone nel punto mostrato tratteggiato. Il carro è spinto in avanti sui tre cerchi, che rotolano lungo la rotaia, sinché le ruote sono di nuovo nella posizione mostrata

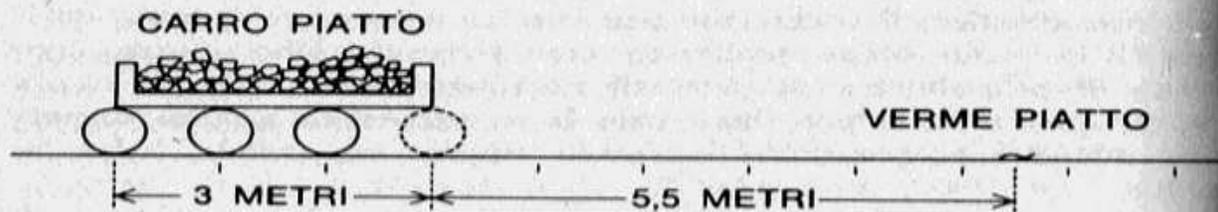


Fig. 63. Quanti cerchi rotoleranno sul verme piatto?

Il cerchio posteriore viene passato davanti come prima e il procedimento ripetuto quante volte è necessario.

Il carro è spinto fuori dalla pagina verso destra. Esattamente 5,5 metri davanti al punto in cui il cerchio tratteggiato tocca la rotaia c'è un verme piatto. Ammettendo che il verme non si muova, quanti cerchi gli passano sopra?

Il lettore è invitato a tentare di risolvere il problema dapprima mentalmente. Dopo controlli la risposta con carta e matita; alla fine la confronti con la risposta al termine di questo capitolo. Coloro che volessero fare un po' più di lavoro a casa, facciano la generalizzazione per n ruote uniformemente distanziate. Cosa sorprendente, non è necessario conoscere la grandezza delle ruote.

Appendice

Nel descrivere Flatland ho detto che non sarebbero possibili delle gallerie, ma ciò non è strettamente vero. Gregory Robert, di North St. Paul, nel Minnesota, ha scritto dicendo che il tetto di una galleria di Flatland potrebbe essere sostenuto da una serie di porte, ognuna incernierata alla sommità. Un abitante di Flatland potrebbe passare sotto una galleria del genere aprendo una porta per volta mentre il soffitto rimane sostenuto dalle altre porte. Ci dovrebbe essere un meccanismo per impedire che le porte venissero aperte tutte contemporaneamente.

« The Fourth dimension: An Efficiency Picture », 12° capitolo di *Mathematical Adventures* di Fletcher Durell (Bruce Humphries, Boston, 1938) contiene delle divertenti riflessioni sugli abitanti di Thinland, una regione simile alla Flatland di Hinton. La visione binoculare è ottenuta con due occhi, uno sulla fronte e uno sul

mento. Un lungo collo permette a un abitante di Thinland di ruotare la testa all'indietro e rovesciarla per vedere dietro di sé. Quando un uomo e una donna devono superarsi, la buona norma è che l'uomo si distenda per farsi passar sopra la donna.

In aggiunta a queste difficoltà meccaniche della vita nel piano, si deve anche citare il problema di ideare un cervello considerando le limitazioni topologiche delle reti piane. Un cervello animale quale noi lo conosciamo richiede una rete tridimensionale fantasticamente complessa di filamenti nevosi, impossibile da realizzare nel piano senza intersezioni. La difficoltà non è però così formidabile quanto sembra, perché si può immaginare reti autointersecantisi lungo le quali gli impulsi elettrici passano per incroci senza, per così dire, svoltare.

Per informazioni sulla moglie e le cinque figlie di Boole e sui loro notevoli discendenti, il lettore è rimandato all'articolo di Norman Gridgeman « In Praise of Boole », in *The New Scientist*, n. 420, pp. 655-57. La moglie di Boole, Mary, nei sessanta anni dopo la morte di suo marito, « scrisse continuamente e predicò le sue teorie in una dozzina di campi », scrive Gridgeman, « ivi comprese la teologia e l'etica. Essa divenne quasi ossessionata dalla mistica del simbolismo algebrico e dai ruoli dello zero e dell'unità. Ancora nel 1909 pubblicò un libro intitolato *The Philosophy and Fun of Algebra* in cui sollecitava " coloro che desiderano... entrare nella giusta relazione con l'Incognito " a creare le loro algebre personali basandosi sui principi booleani ».

Howard Everest Hinton, nipote di Charles Hinton e di Mary, la figlia maggiore di Boole, è un notissimo entomologo inglese. La storia di due degli altri nipoti di Charles, William Hinton e sua sorella Joan, fisica, è raccontata nel *Time* del 9 agosto 1954, p. 21. Entrambi divennero sostenitori entusiasti della Cina comunista. Il figlio della seconda figlia di Boole, Margaret, è Geoffrey Taylor, matematico di Cambridge. La storia di Alicia, la terza figlia, è stata già detta in breve. La quarta figlia, Lucy, divenne professoressa di chimica al Royal Free Hospital di Londra. Ethel Lillian, la più giovane, sposò Wilfrid Voynich, uno scienziato polacco profugo. In gioventù scrisse *The Gadfly*, un racconto fieramente anticattolico sul Risorgimento italiano, che è diventato uno dei libri più venduti in Russia e, più di recente, in Cina. Dopo la prima guerra mondiale i Voynich si trasferirono da Londra a Manhattan, dove Ethel morì nel 1960 all'età di 96 anni. « I Russi di oggi si meravigliano sempre », scrive Gridgeman, « che così pochi occidentali abbiano sentito parlare di E. L. Voynich, la grande narratrice inglese ».

Risposte

Il problema di tagliare un cubo per ottenere una sezione piana di area massima ha la risposta mostrata in fig. 64. La sezione obliqua è un rettangolo di area $\sqrt{2}$ ossia 1,41... (Il problema è stato posto da C. Stanley Ogilvy e risolto da Alan R. Hyde in *American Mathematical Monthly*, vol. 63, 1956, p. 578). È possi-

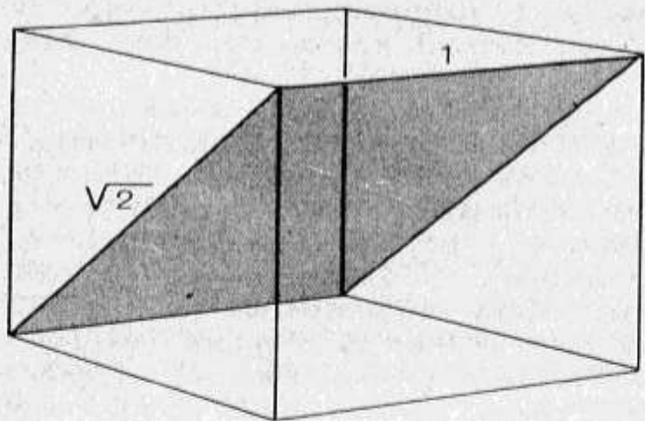


Fig. 64. Risposta al problema del cubo.

bile affettare un cubo in modo che la sezione sia un esagono regolare ma l'area è di solo 1,29...

La risposta al problema del carro piatto è che solo un cerchio passa sopra il verme. Quando vi sono n cerchi a distanze eguali e n è pari, il numero di cerchi che rotola sopra un verme situato in un punto qualsiasi della rotaia (salvo nei punti in cui un cerchio passa direttamente sul verme) è $n/2$. Se n è dispari, la situazione è più complessa. La rotaia davanti al cerchio anteriore deve essere divisa in segmenti che sono tutti di lunghezza uguale alla distanza fra due cerchi adiacenti. Un verme su uno dei segmenti di una serie alterna, iniziante col segmento immediatamente avanti al cerchio anteriore sarà pestato da $n/2 + 1/2$ cerchi. Se è su uno dei segmenti dell'altra serie alterna di segmenti sarà pestato da $n/2 - 1/2$ cerchi. Ancora in questo caso si suppone che il verme non sia in un punto in cui un cerchio sia disposto esattamente sopra di esso; o, come direbbe un matematico, vengono ignorate « le condizioni al contorno ».

I lettori che hanno risolto il problema avranno osservato che il carro si muove due volte più rapidamente rispetto al terreno della ruota sottostante, sicché per ogni distanza x superata da una ruota, il carro fa una distanza $2x$. Lo stesso principio meccanico interviene nel funzionamento delle porte degli ascensori; una delle mezze porte scorre due volte più veloce e due volte più lontano dell'altra.

10

Taxicab
Geometry

A conjecture both deep and
profound
Is whether a circle is round.
In a paper by Erdős,
Written in Kurdish,
A counterexample is found.

—Anonymous

Altering one or more postulates of Euclidean geometry makes it possible to construct all kinds of strange geometries that are just as consistent, or free of internal contradictions, as the plane geometry taught in secondary schools. Some of these non-Euclidean geometries have turned out to be enormously useful in modern physics and cosmology, but the two most important, elliptic geometry and hyperbolic geometry, have a structure that is impossible to visualize. Hence most laymen find these geometries too difficult to comprehend and are

certainly not able to search their structure for new theorems or to work on interesting non-Euclidean problems.

In this chapter we shall take an elementary look at a quite different kind of non-Euclidean geometry, one so easy to understand that anyone exploring its structure on ordinary graph paper can have the excitement of discovering new theorems. Often called taxicab geometry, this system can be modeled by taxicabs roaming a city whose streets form a lattice of unit-square blocks. In many ways taxicab geometry is curiously like ordinary plane geometry. Yet it is sufficiently different that exploring it can be great fun. Moreover, such exploration provides a strong feeling for how geometries may vary in bizarre ways from Euclidean geometry and still form a logically consistent formal system.

As far as I know taxicab geometry was first seriously proposed by Hermann Minkowski, a mathematician born in Russia who was young Albert Einstein's teacher in Zurich. Minkowski later gave special relativity its beautiful formulation in a four-dimensional geometry of space and time, and the space-time graphs widely used in relativity theory are named for him. At about the turn of the century he published in Germany his *Collected Works* (reprinted in the U.S. by Chelsea Publishing Company in 1967), in which he analyzed a variety of metric systems: topological spaces consisting of a well-defined set of points and a rule for measuring the "distance" between any two points.

Taxicab geometry is a metric system in which the points of the space correspond to the intersections of the horizontal and vertical lines of square-celled graph paper, or to the intersections of the streets in our idealized city. If two points, A and B , are at intersections on the same street, the distance between them is measured, as it is in Euclidean geometry, by counting the number of unit blocks from one to the other. If A and B are not on the same street, however, then instead of applying the Pythagorean theorem to calculate the distance between them we count the number of blocks a taxicab must travel as it goes

from A to B (or vice versa) along a shortest-possible route. The structure of taxicab geometry can be formalized with definitions and axioms in a variety of ways, but here I shall dispense with such technicalities and simply describe it in intuitive terms.

In Euclidean geometry the minimum distance between two points (as the crow flies) defines a unique straight line. In taxicab geometry there may be many paths, all equally minimal, that join two points. In what follows “path” will be used to mean any taxicab route that covers the distance between two points with the minimum mileage.



If two points are not on the same street, how many distinct paths connect them? Pascal's famous number triangle comes to our aid on this question. Consider the points A and B at opposite corners of a 2-by-3 rectangle of blocks, as shown in Figure 63. The colored lines at the right in the illustration show how the rectangle can be drawn on Pascal's triangle to solve the problem. The lowest corner of the rectangle marks the answer: There are 10 distinct paths between A and B . Note that Pascal's triangle is left-right symmetrical, and so it does not matter in the least if the rectangle is drawn so that it leans the other way. The same answer is obtained. (Remember that in Pascal's triangle each number is the sum of the two numbers above it. For more on Pascal's triangle see Chapter 15 of my *Mathematical Carnival*.)



Readers familiar with combinatorics will recall how Pascal's triangle serves to instantly show how many ways a set of n items can be selected from a larger set of r items. The answer is the number at the intersection of the n th diagonal and the r th row of the triangle. In the case of the taxicab problem 10 is the number of ways two items can be selected from five. The two corresponds to one side of our rectangle of blocks and the five to the sum of its two sides. Ten is also the number of minimal routes a taxicab can follow from one corner of a 3-by-2 rectangle to the diagonally opposite corner.

It is not necessary to draw Pascal's triangle to determine the number of paths between two points in taxicab geometry. We can also use the familiar formula for calculating the number N of ways to select n objects from r objects: $N = r! / (n!(r - n)!)$. For example, in our taxicab problem $r!$ equals $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$, or 120, $n!$ equals 1×2 , or 2, and $(r - n)!$ equals $1 \times 2 \times 3$, or 6, so that the formula reduces to $N = 120/12$, or 10.



The fact that the rectangle can be tipped in either direction on Pascal's triangle is a pictorial way of saying that the number of ways of selecting n items from a larger set of r items is the same as the number of ways of selecting $r - n$ items from a set of r items. This fact becomes intuitively obvious if you consider that each time a unique set of n items is selected from r items, a unique set of $r - n$ items remains. In the taxicab model this means that if a Euclidean rectangle is drawn on the lattice, the number of distinct taxicab paths between any two diagonally opposite corners is the same as the number of paths joining the other two corners.

Since the "straight lines" (the shortest paths) of taxicab geometry may be crooked from the Euclidean point of view, the concept of an "angle" becomes either meaningless or radically different in this system. It is nonetheless possible to define close analogues of Euclidean polygons, including a two-sided "biangle" that is a stranger to Euclid's ge-

ometry. Some examples of biangles are shown in Figure 64. It should be obvious that although different biangles can share the same pair of “corner” points, the two “sides” of any biangle must be equal because they join the same two points.

A taxicab scalene triangle with corners A , B , and C and sides of 14, 8, and 6 is shown at the left in Figure 65. The sides of taxi polygons must of course be taxi paths, and the paths that make up a polygon of specified dimensions may vary in shape but not in length. Observe how the triangle in the illustration violates the Euclidean theorem that the sum of any two sides of a triangle must be greater than the third side. In this case the sum of two sides equals the third: $6 + 8$ equals 14.

Figure 64

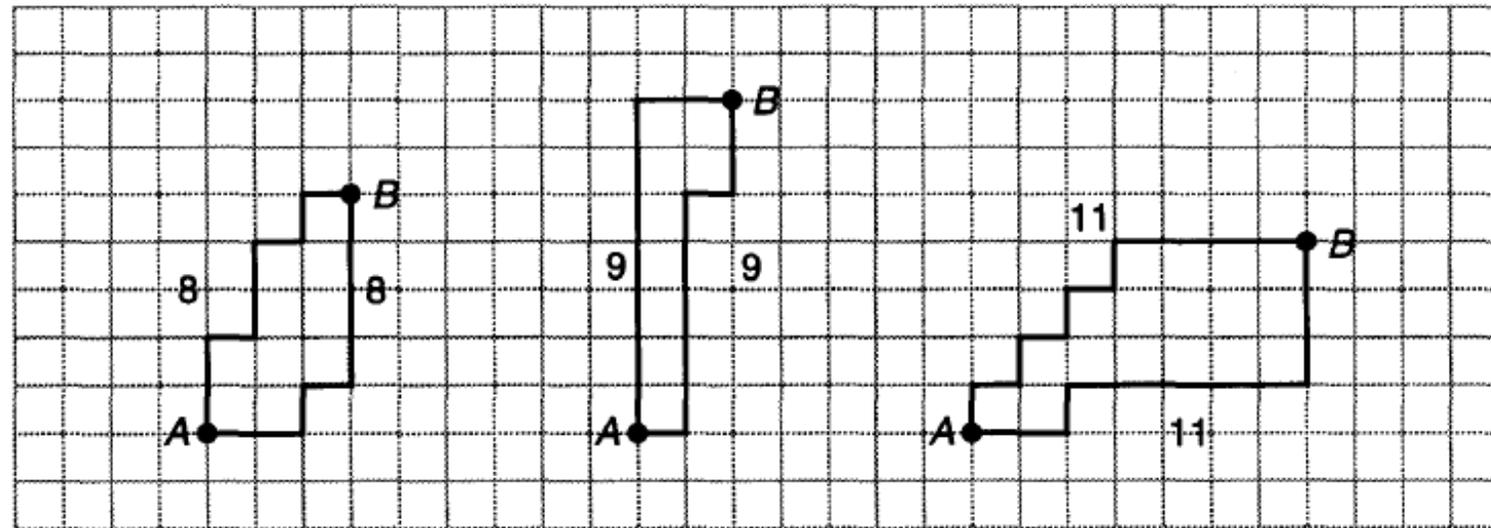
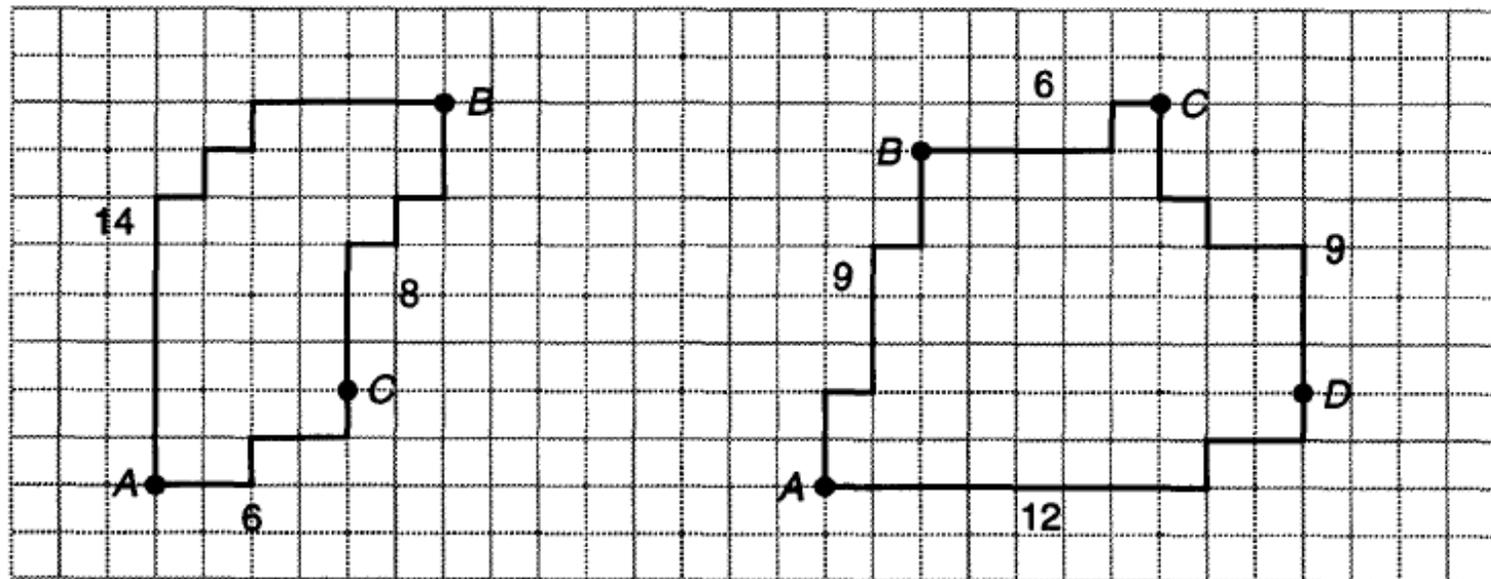


Figure 65



A taxi quadrilateral of sides 9, 6, 9, and 12 is shown at the right in the illustration.

Three taxi squares, all of side 6, are shown in Figure 66. Only the square at the left obeys the Euclidean theorem that the diagonals of a square are equal. As these figures demonstrate, taxicab squares can have innumerable Euclidean shapes.

It is easy to define a circle in taxicab geometry, and the result is quite unexpected. As in Euclidean geometry a circle is defined as the locus of all the points that are the same distance from a given point. Suppose the distance is 2. The resulting circle consists of the eight points shown at the left in Figure 67—a neat way to square the circle! Note that only one radius goes from the center point O to points A , B ,

Figure 66

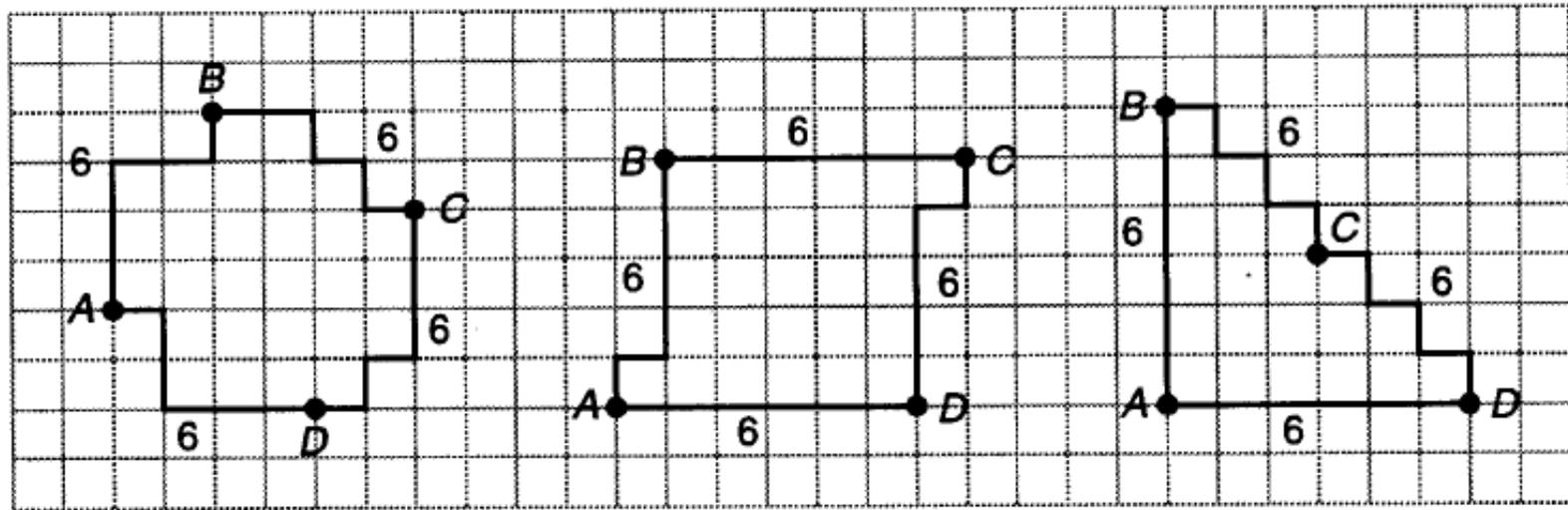
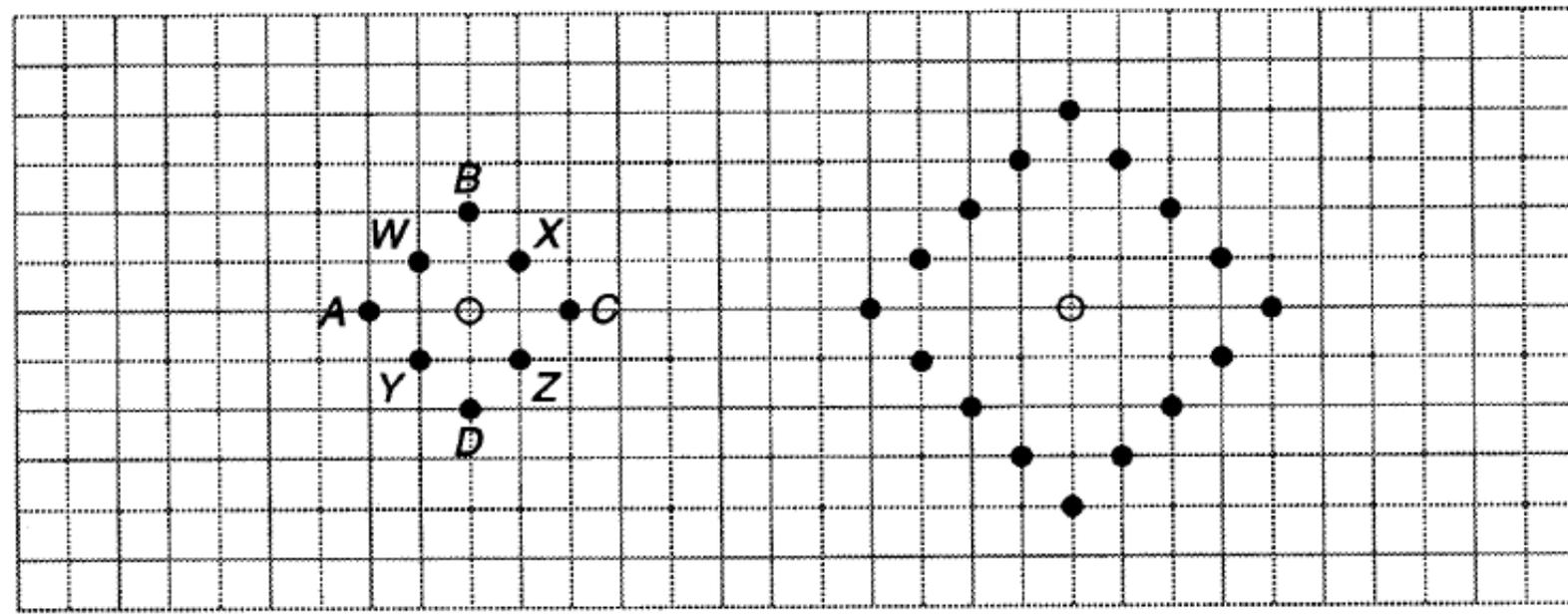


Figure 67



C, and D, and there are two radiuses going to each of the other four points. It is not hard to show that any taxicab circle of radius r consists of $4r$ points and has a circumference of $8r$. If we adopt the Euclidean definition of pi as the ratio of the circumference of any circle to its diameter, then taxicab pi is exactly 4.

Observe that our eight-point taxicab circle includes a variety of sets of vertexes for taxi polygons of 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8 sides. For example, there is the biangle D,X , the equilateral triangle B,C,D , the square A,B,C,D , the regular pentagon A,W,X,Z,Y , the regular hexagon A,W,B,X,Z,Y , and the regular heptagon A,W,X,C,Z,D,Y . And the eight points of the circle lie at the corners of a set of regular octagons.

Another Euclidean theorem that taxicab geometry violates is the one stating that two circles can intersect at no more than two points. As shown in Figure 68, two taxicab circles may intersect at any finite number of points. The larger the circles are, the more points at which they can intersect. A little experimentation turns up excellent taxicab analogues of the other three conic-section curves. Figure 69 shows four 12-point taxicab ellipses. As in Euclidean geometry, a taxicab ellipse is the locus of points whose distances from two fixed points A and B have the same sum. The points, called foci, are marked here with colored circles, and in all the examples shown in the illustration the constant sum is 6.

The fourth curve is actually a degenerate ellipse corresponding to the straight line that results when the constant sum that defines a Euclidean ellipse equals the distance between its foci. If this equality holds in taxicab geometry, then when A and B are on the same street, the result is a straight line of points. Otherwise the ellipse consists of all the points within the Euclidean rectangle of lattice lines that has A and B at diagonally opposite corners. For example, suppose that A and B are opposite corners of a square with lattice sides of length 4.

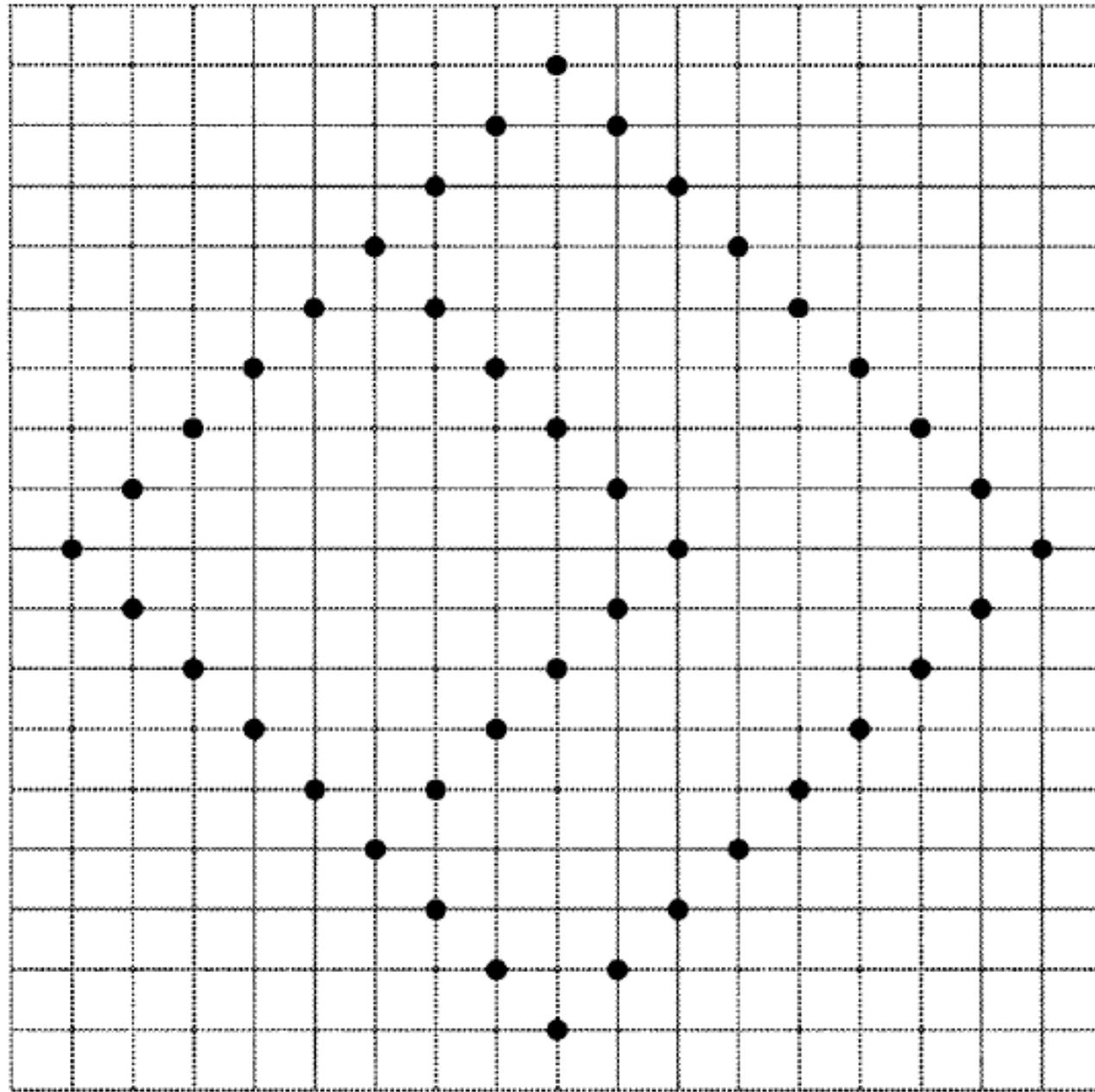
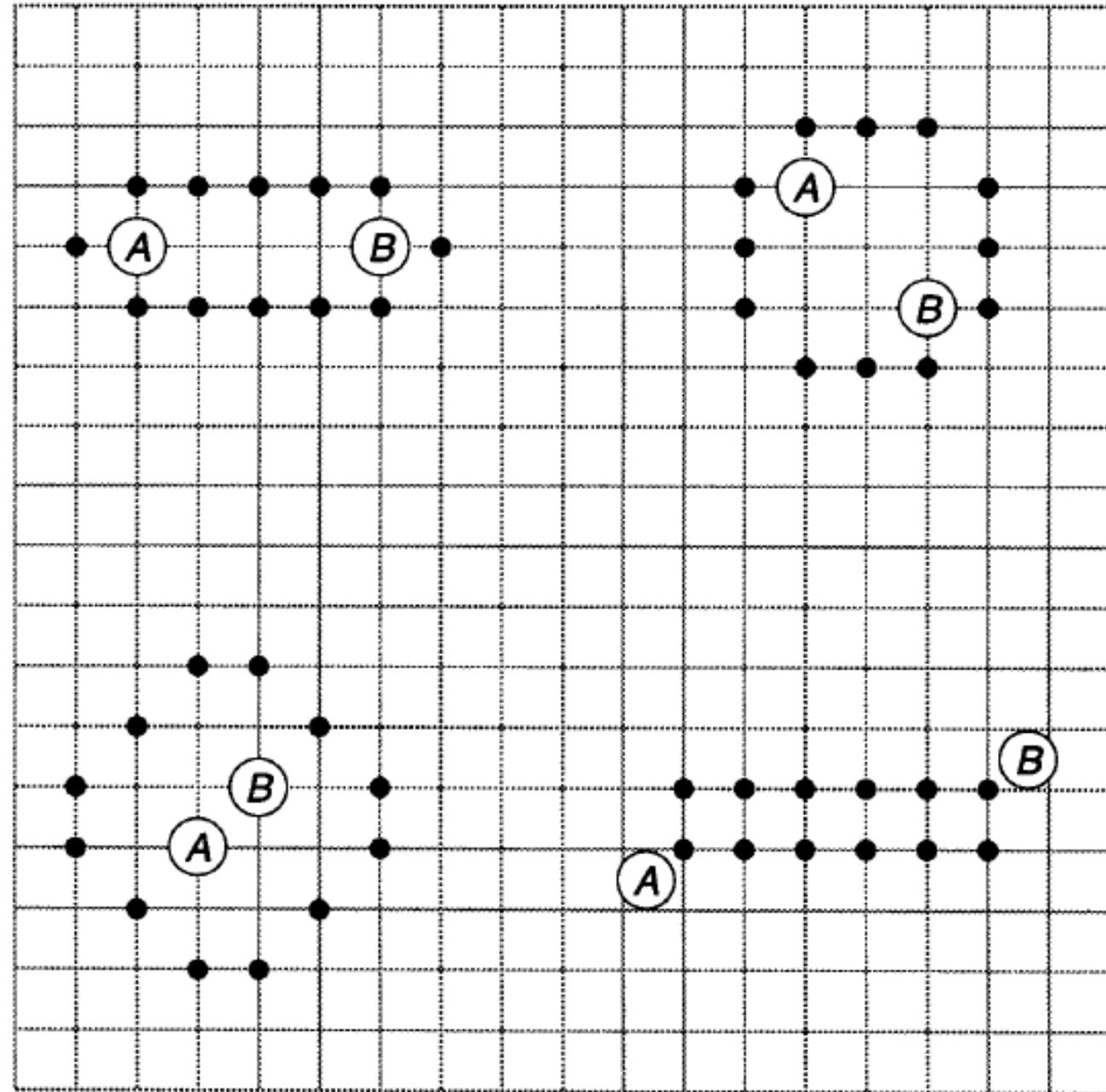


Figure 68

Figure 69



In this case the taxi distance between A and B is 8, and for each of the square's 25 points the sum of their distances from A and B is 8. These 25 points will be the degenerate ellipse of constant sum 8 whose foci are A and B . If the constant sum is greater than the taxi distance between A and B , then as in Euclidean geometry the taxi ellipse becomes more circular as the foci move closer together. When A and B coincide, then once again as in Euclidean plane geometry the ellipse becomes a circle.

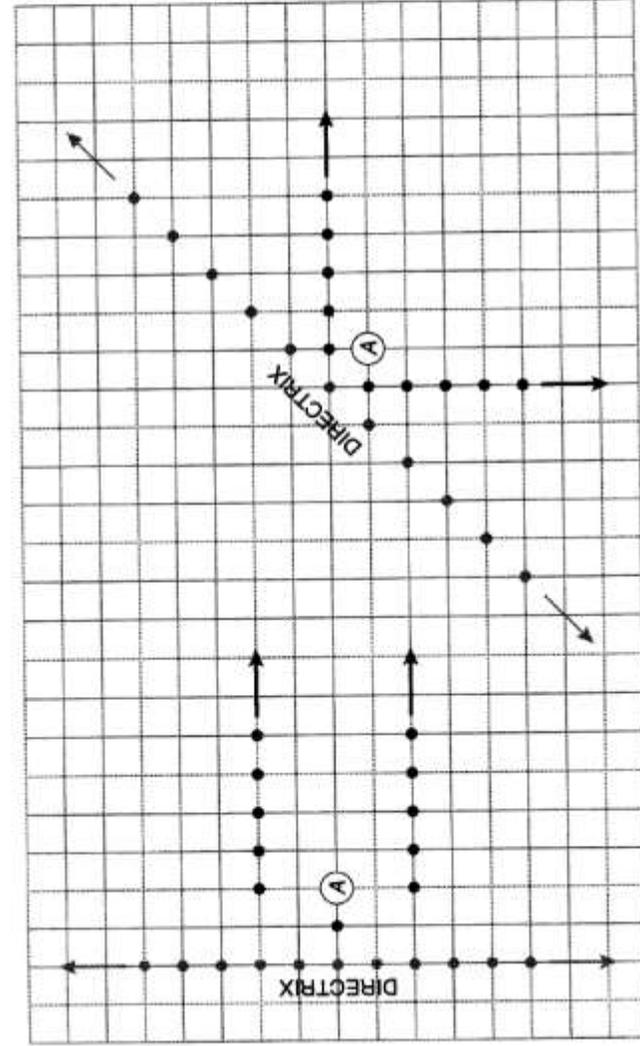
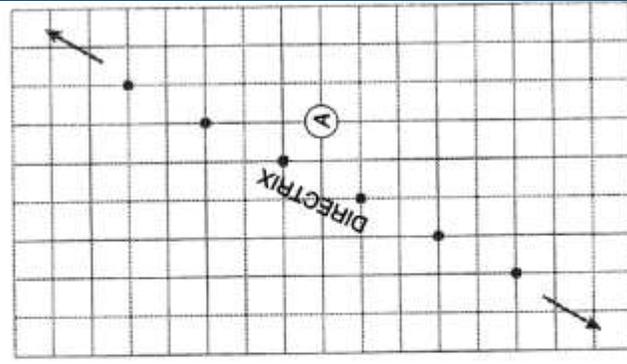
A Euclidean parabola is the locus of all points whose distance from a focus A is equal to its shortest distance from a fixed straight line: the directrix. If a taxicab directrix is defined as the set of points along a Euclidean straight line, then taxicab parabolas can also be constructed. Two are shown at the left in Figure 70. Try drawing the parabola for the directrix and the focus shown at the right.



Taxicab hyperbolas are more complex. A Euclidean hyperbola is the locus of all points for which the difference between the distances from a pair of foci A and B is constant. The appearance of a taxicab hyperbola varies considerably as the ratio of its basic parameters varies. In the figure at the left in Figure 71, the foci A and B are placed to show the limiting case, a degenerate hyperbola of just one branch, where the constant difference is 0. The figure at the right in the illustration shows two infinitely long branches of a taxicab hyperbola with a constant difference of 4.

Taxicab geometry springs another surprise in Figure 72. In this hyperbola the constant difference is 2. Here the two branches are two infinite sets of points, one in the sector of the plane at the upper left and one in the sector at the lower right, and each with a “tail” of infinite length. As shown at the bottom in the illustration, the results are similar when the constant is 8, except that the infinite sets of points are in the sectors of the plane at the upper right and the lower left, and there are no tails.

Figure 70



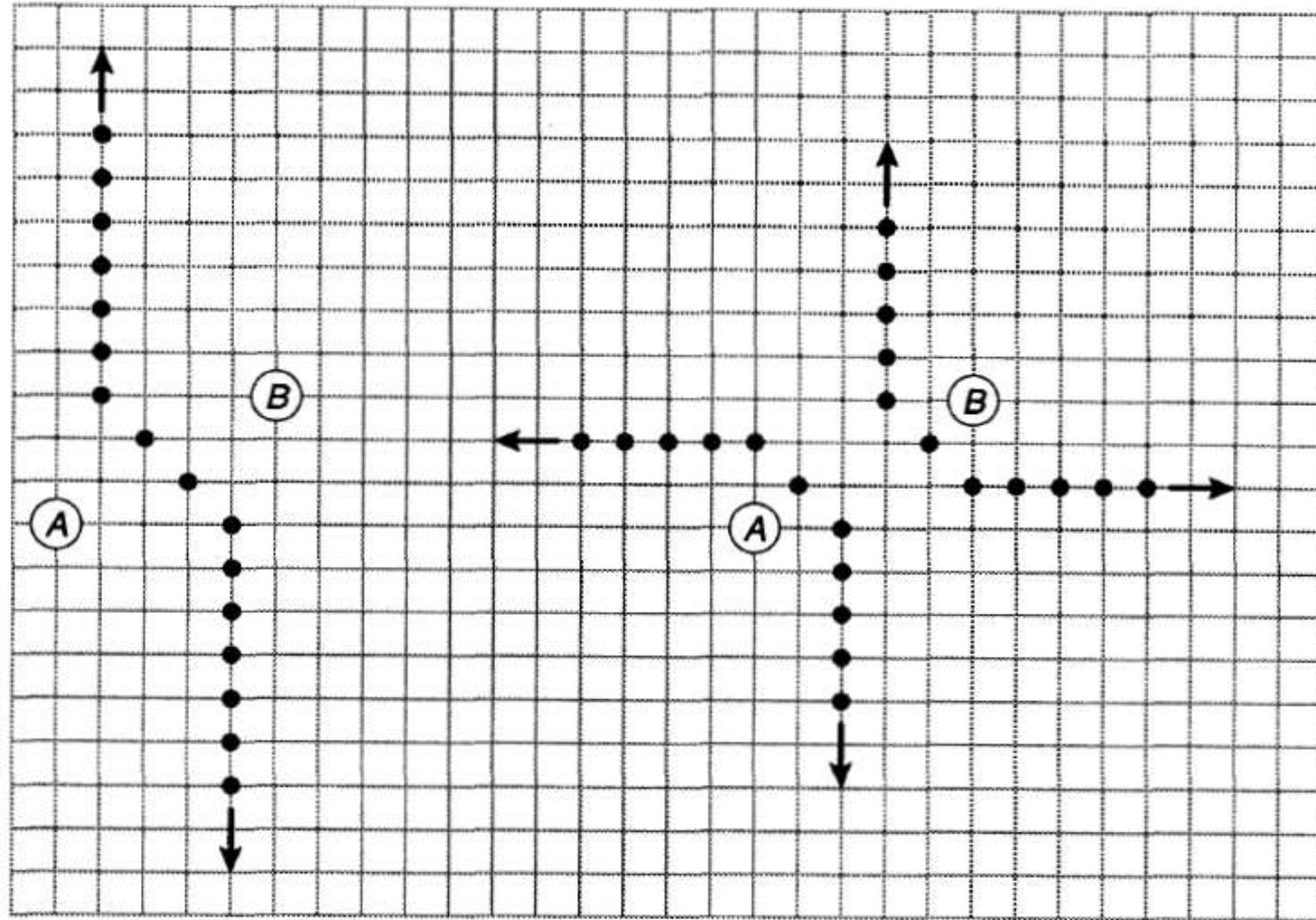


Figure 71

With the foci placed as shown in all of these examples the constant difference cannot be an odd number because the resulting figure would include points away from intersections, the only allowable points in taxicab space. As an exercise place A and B at diagonally opposite corners of a 3-by-6 Euclidean rectangle of lattice sides and draw the hyperbola for which the constant difference is 1. The result is two “parallel” branches, each resembling the degenerate hyperbola with a constant difference of 0. A not-so-easy problem is to define the exact conditions under which taxicab hyperbolas of the five general types are created.

Only one book has been published on taxicab geometry: it is *Taxicab Geometry*, a paperback by Eugene F. Krause, a mathematician at the University of Michigan. (This work along with a few of the dozen or so papers on the topic that have appeared in British mathematical journals over the past two decades are listed in the bibliography at the end of this chapter) Krause’s book is recommended particularly to

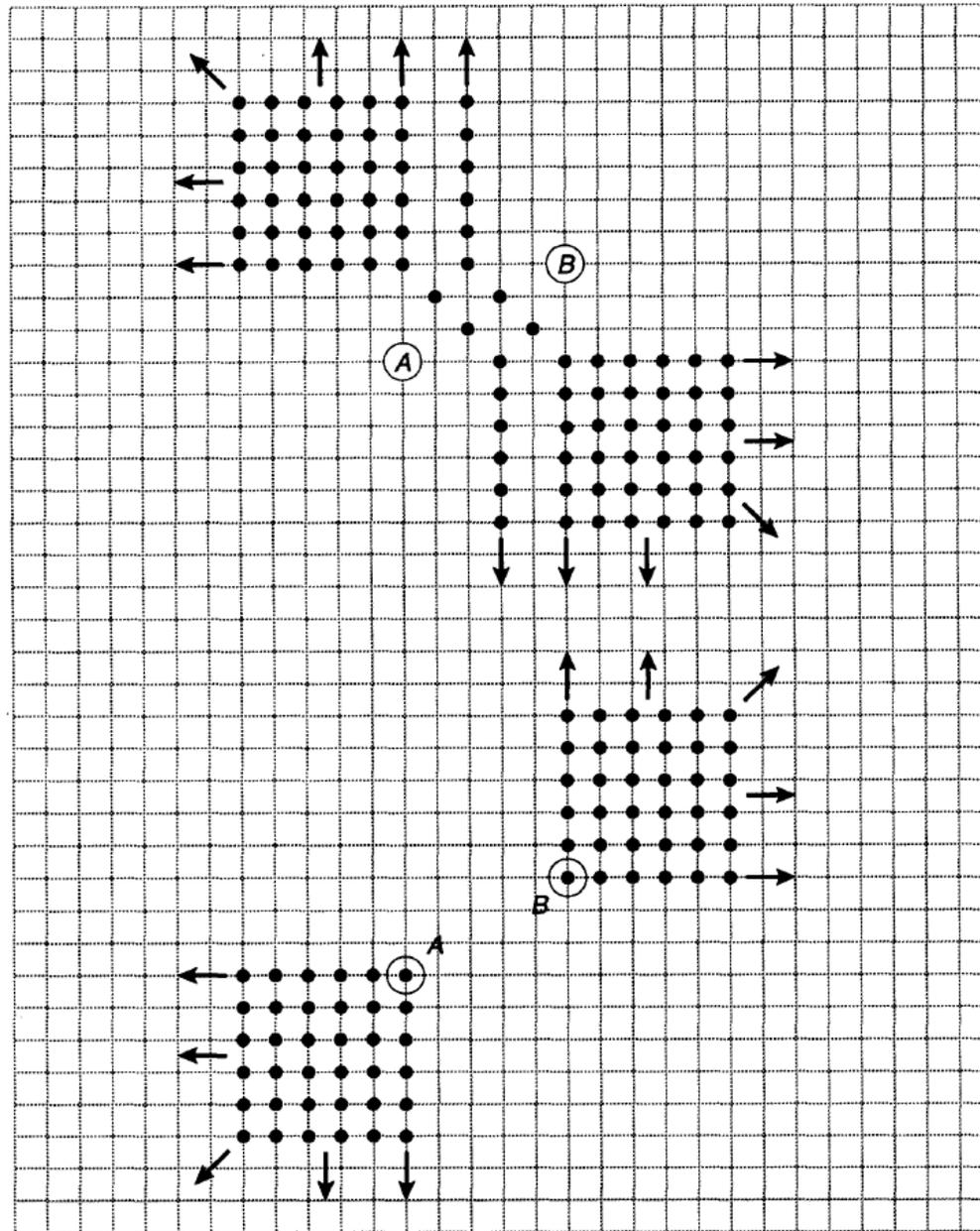


Figure 72



students who want to learn how taxicab geometry can be elegantly generalized to the entire Cartesian plane, where all points are represented by ordered pairs of real numbers from the two coordinate axes. The rule of measuring distance by the shortest path along line seg-



Matematica «tradizionale»

L'ELLISSE

Senza dubbio un cerchio ha una certa semplicità attraente a prima vista, ma un'occhiata a un'ellisse dovrebbe convincere anche il più mistico degli astronomi che la perfetta semplicità del cerchio è parente al vacuo sorriso della idiozia completa. In confronto a quello che può dirci un'ellisse, un cerchio ha ben poco da dire. Può darsi che la stessa nostra ricerca di semplicità cosmiche nell'universo fisico sia dello stesso tipo circolare: una proiezione della nostra non complicata mentalità su un mondo esterno estremamente complicato.

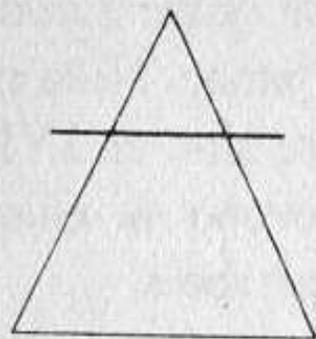
Eric Temple Bell

I matematici hanno l'abitudine di studiare, per il gusto di farlo, cose che sembrano tremendamente inutili; poi, secoli dopo, i loro studi vengono ad avere un enorme valore scientifico. Non vi è esempio migliore del lavoro fatto dagli antichi greci sulle curve non circolari di secondo grado: ellisse, parabola e iperbole. Esse furono studiate per la prima volta da uno dei discepoli di Platone. Nessuna importante applicazione scientifica fu trovata per esse sino al XVII secolo, quando Keplero scoprì che i pianeti si muovono su ellissi e Galileo dimostrò che i proiettili viaggiano lungo parabole.

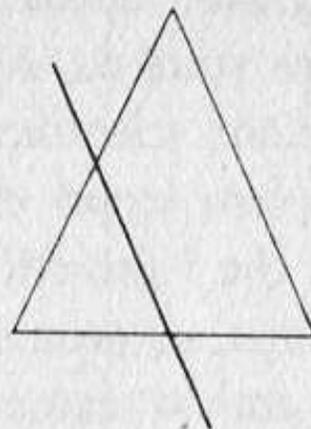
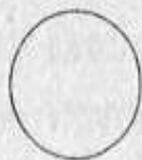
Apollonio da Perga, un geometra greco del III secolo a.C., scrisse il più grande degli antichi trattati su queste curve. Il suo lavoro *Le coniche* fu il primo a mostrare come tutte e tre le curve, assieme al cerchio, possono essere ottenute tagliando lo stesso cono con un piano inclinato di un angolo variabile in modo continuo. Se un piano passa per un cono in modo da esser parallelo alla base (fig. 88), la sezione è un cerchio. Se il piano viene inclinato, sia pur di poco, la sezione diviene ellittica. Più il piano viene inclinato, più allungata diventa l'ellisse, o, come dice il matematico, più eccentrica. Ci si potrebbe attendere che con l'aumentare dell'inclinazione del piano la curva divenisse sempre più della forma di una pera (dato che più scende in basso il piano più si allarga il cono), ma non è così. Essa rimane un'ellisse perfetta sinché il piano diventa parallelo al lato del cono. A questo punto la curva cessa di esser chiusa su sé stessa; i suoi rami si estendono verso l'infinito e la curva diventa una pa-

rabola. Inclinando ulteriormente il piano lo si porta ad intersecare un cono invertito posto al di sopra del primo (fig. 88 in basso). Le due sezioni coniche sono ora i due rami dell'iperbole. (È un errore comune supporre che il piano debba esser parallelo all'asse del cono per tagliare un'iperbole). Esse variano in forma man mano che il piano settore continua a ruotare sinché finalmente degenerano in rette. Le quattro curve sono chiamate curve di secondo grado perché esse sono le forme dei grafici cartesiani di tutte le equazioni di secondo grado fra due variabili.

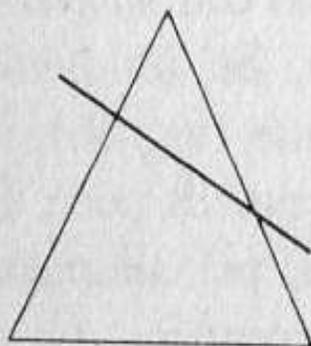
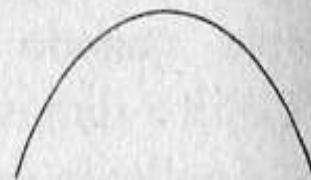
L'ellisse è la più semplice di tutte le curve piane che non siano rette o cerchi. Essa può esser definita in numerosi modi, ma forse il più semplice a capirsi intuitivamente è questo: un'ellisse è il luogo, o traccia, di un punto che si muove su un piano in modo che la somma delle sue distanze da due punti fissi sia costante. Questa proprietà è alla base di un ben noto metodo per disegnare un'ellisse. Si fissino due puntine su un foglio di carta, si metta attorno ad esse un anello di spago e lo si tenga teso con la punta di una matita, come in fig. 89. Muovendo la matita attorno alle puntine si traccia



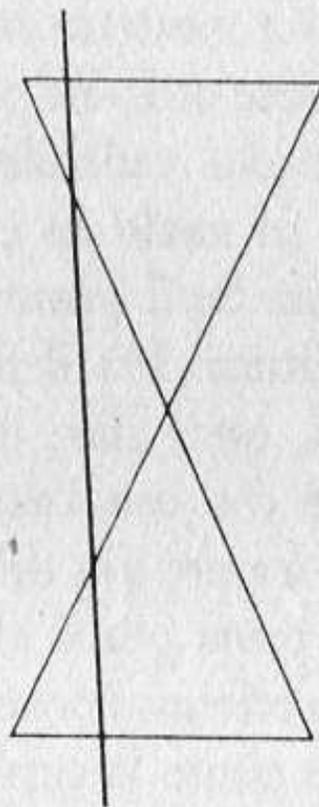
CERCHIO



PARABOLA



ELLISSE



IPERBOLE



Fig. 88. Le quattro sezioni coniche.

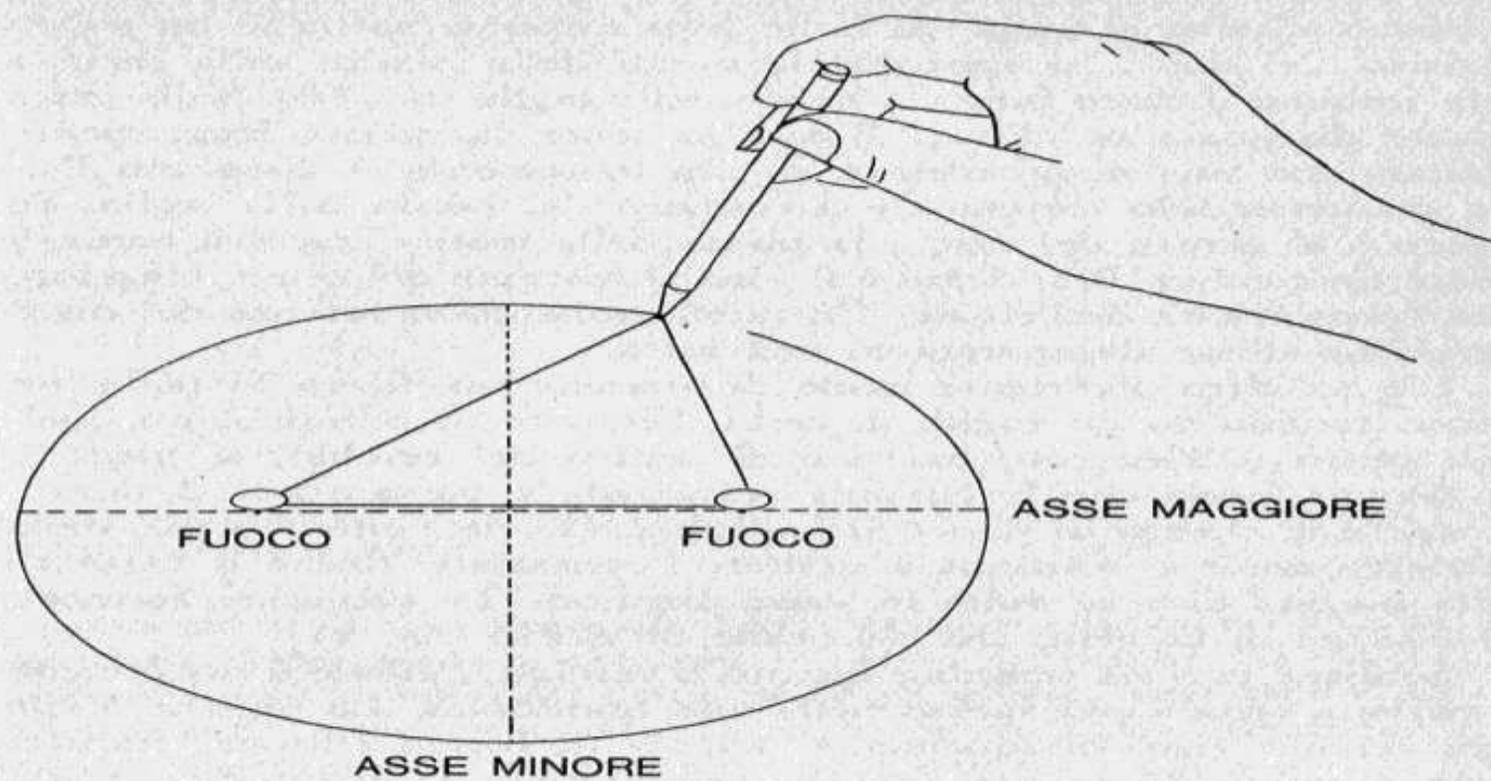


Fig. 89. Il più semplice modo di disegnare un'ellisse.

un'ellisse perfetta. (La lunghezza dello spago non può variare; perciò la somma delle distanze della punta della matita dalle due puntine rimane costante). I due punti fissi (puntine) sono chiamati fuochi dell'ellisse e giacciono sull'asse maggiore. Il diametro perpendicolare a quest'asse è l'asse minore. Se si avvicinano le puntine (mantenendo lo stesso anello di spago), l'ellisse diviene sempre meno eccentrica. Quando i due fuochi vanno a coincidere, l'ellisse diventa un cerchio. Quando i fuochi si allontanano, l'ellisse diventa più allungata sinché alla fine degenera in una linea retta.

Vi sono molti altri modi di costruire le ellissi. Un metodo curioso può esser realizzato con una teglia da dolce di forma circolare ed un disco di cartone di diametro uguale alla metà di quello della teglia. Si mette del nastro adesivo attorno al bordo interno della teglia per impedire al disco di slittare quando lo si fa ruotare lungo il bordo. Si fissa un foglio di carta sul fondo della teglia con strisce

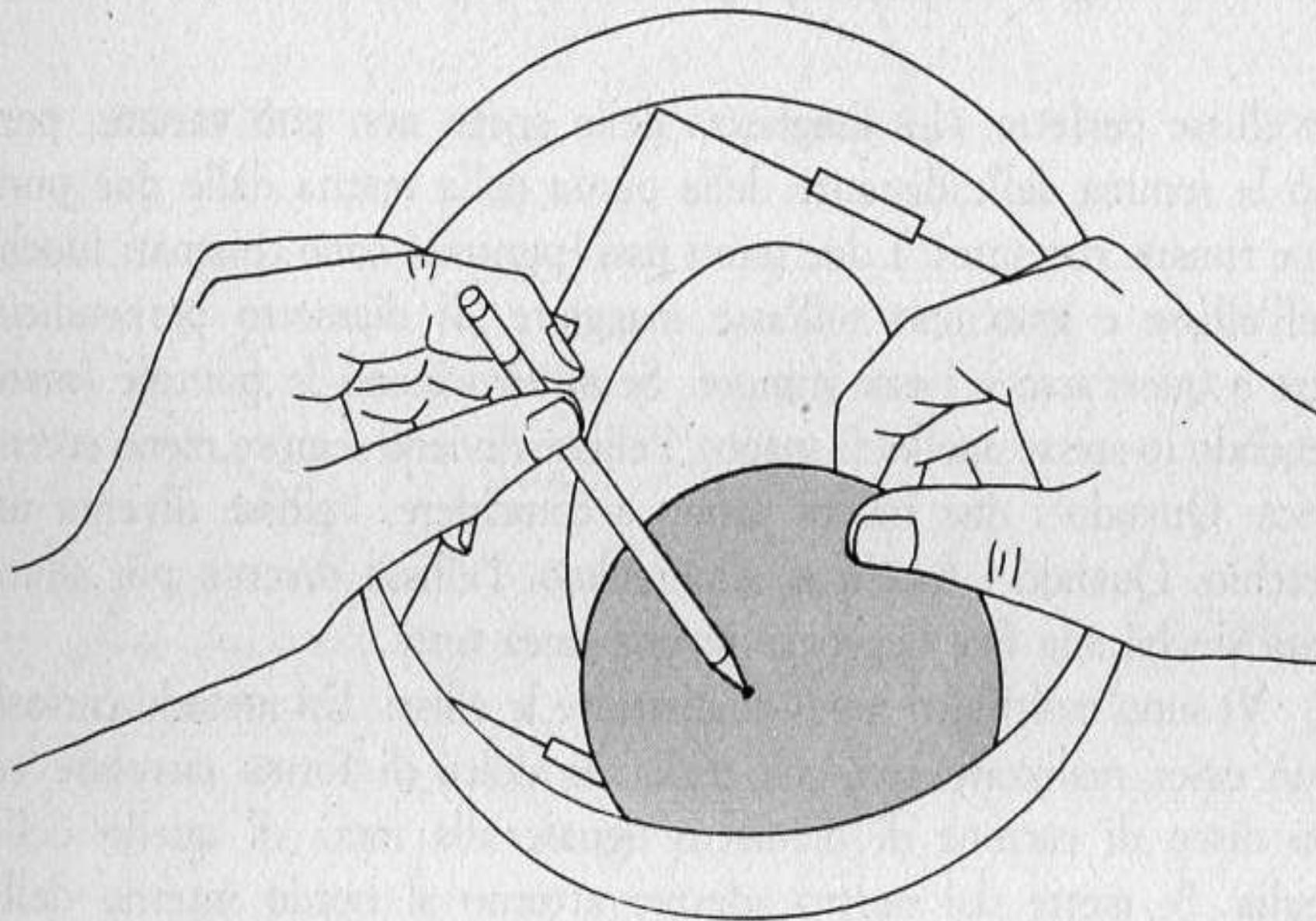


Fig. 90. Un ellissografo fatto con una teglia circolare da dolci ed un disco di cartone.

di nastro adesivo ai bordi. Si fa un foro con una matita in un punto qualsiasi del disco, si appoggia la punta della matita sulla carta e si fa rotolare il disco lungo il bordo della teglia (fig. 90). Sulla carta rimane disegnata un'ellisse. È meglio tener la matita leggermente pressata con una mano mentre si gira lentamente il disco con l'altra, mantenendolo fortemente a contatto del bordo della teglia. Se il foro è al centro del disco, la punta della matita traccerà naturalmente un cerchio. Più vicino è il foro al margine del disco, maggiore sarà l'eccentricità dell'ellisse. Un punto sulla circonferenza del disco traccia un'ellisse degenerata in una retta.

C'è un altro divertente modo di ottenere un'ellisse. Si taglia un grosso cerchio da un foglio di carta. Segnato un punto in un qualsiasi posto nell'interno, ma non al centro del cerchio, si piega il cerchio in modo che la circonferenza vada a passare per il punto. Si apre e si ripiega di nuovo il foglio usando un punto diverso della circonferenza e si continua a ripetere l'operazione finché la carta risulta piegata diverse volte in varie direzioni. Le piegature formano un insieme di tangenti che delineano un'ellisse (fig. 91).

Sebbene non sia semplice quanto il cerchio, l'ellisse è nondimeno la curva « vista » più spesso nella vita quotidiana. La ragione è che ogni cerchio visto obliquamente, appare di forma ellittica. Inoltre, tutte le ombre chiuse non circolari proiettate su un piano da cerchi e

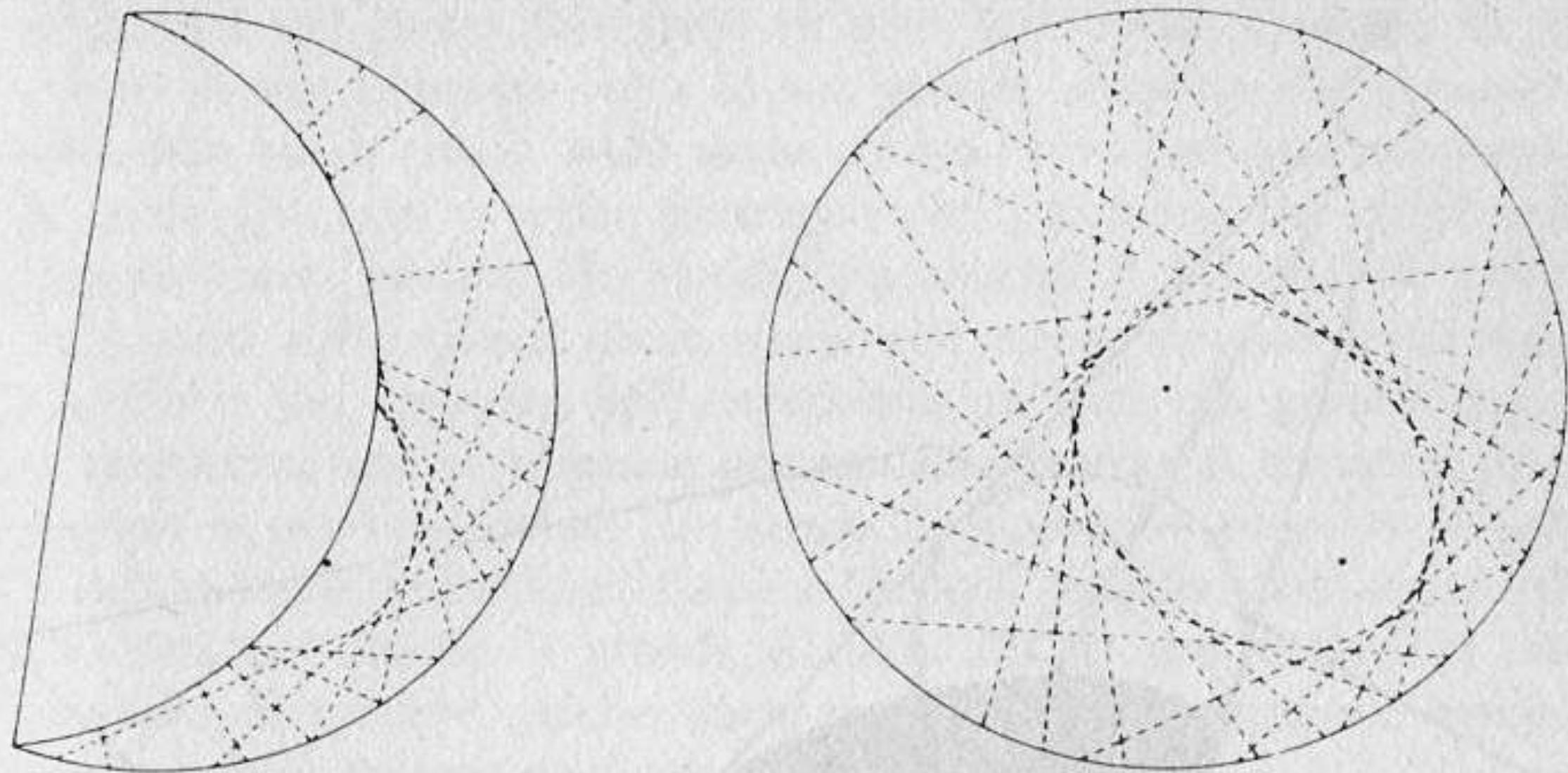


Fig. 91. Se si piega un cerchio di carta in modo che il suo bordo passi per un punto eccentrico si genera un'ellisse.

sfere sono ellissi. Le ombre sulla sfera stessa — la curva interna di una luna crescente, per esempio — sono delimitate da cerchi massimi, ma noi le vediamo come archi di ellisse. Inclinando un bicchiere d'acqua (non importa se il bicchiere ha forma cilindrica o conica) la superficie del liquido acquista un contorno ellittico.

Una palla ferma sulla superficie di un tavolo (fig. 92) ha un'ombra ellittica che è la sezione di un cono di luce in cui la palla si adatta esattamente. La palla si appoggia precisamente in uno dei fuochi dell'ombra. Se immaginiamo una sfera più grande tangente alla superficie dal di sotto e che si adatti esattamente nello stesso cono, la sfera maggiore tocca l'ombra nell'altro fuoco. Queste due sfere forniscono la seguente famosa e magnifica dimostrazione (di G. P. Dandelin, matematico belga del XIX secolo) che la sezione conica è effettivamente un'ellisse.

Il punto A è un punto qualsiasi sull'ellisse. Tracciare una linea (colorata nella figura) che passa per A e per il vertice del cono. Questa linea sarà tangente alle sfere nei punti D ed E. Tracciare una linea da A a B, dove la sfera piccola tocca l'ombra, ed una linea simile da A a C, dove la sfera maggiore tocca l'ombra. AB è uguale ad AD perché entrambe le linee sono tangenti a una sfera dallo stesso punto fisso. AE è uguale ad AC per la stessa ragione. Sommando le uguaglianze: $AD + AE = AB + AC$. Ora $AD + AE$ è uguale a DE. Data la simmetria del cono e delle sfere, questo segmento ha una

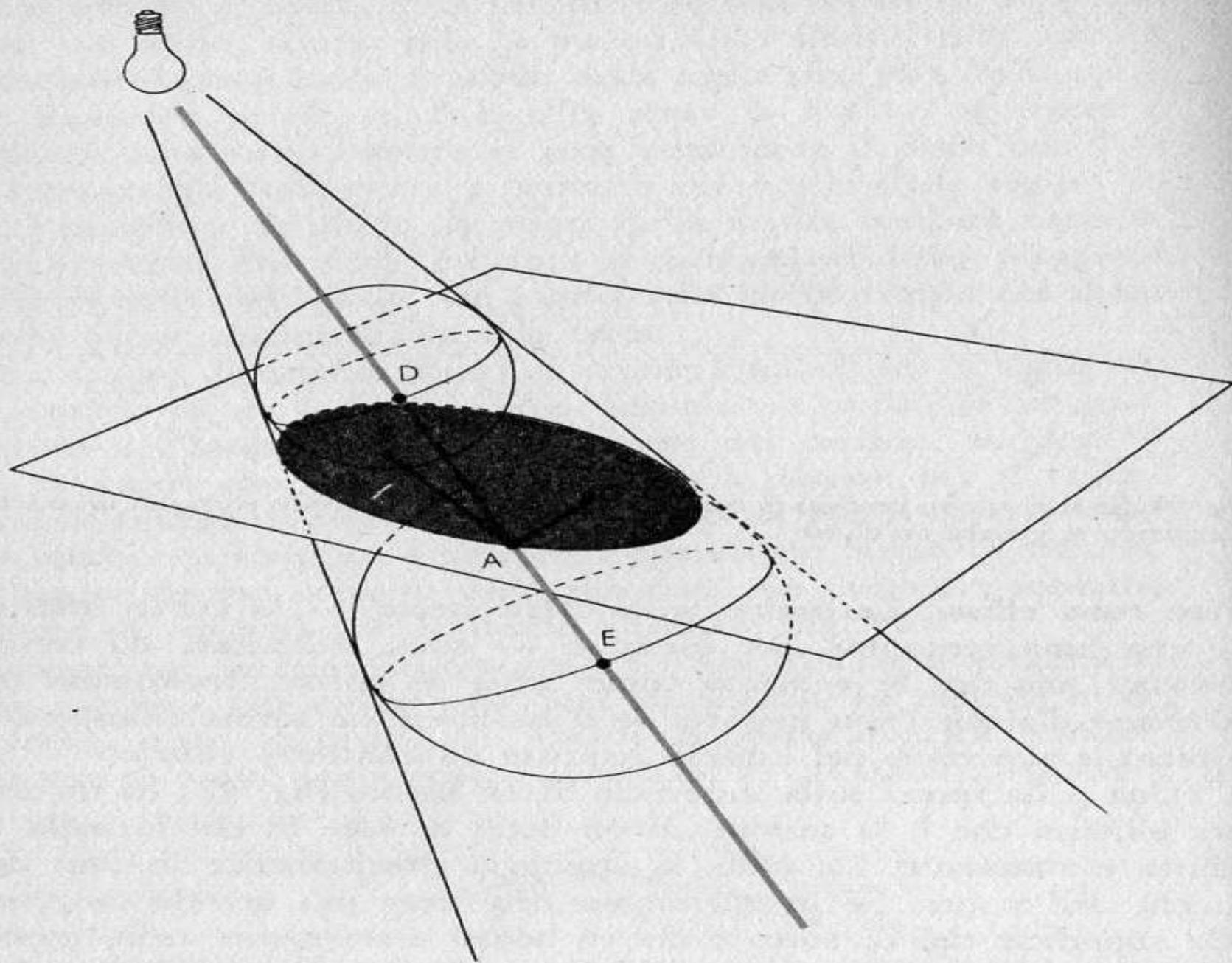


Fig. 92. Mediante una sfera più grande si può dimostrare che l'ombra di una sfera piccola è un'ellisse.

lunghezza costante a prescindere di dove è scelto il punto A sull'ellisse. Se la somma di AD e AE è costante, allora la suddetta equazione rende la somma di AB e AC anch'essa costante. Dato che AB e AC sono le distanze di A dai due punti fissi, il luogo di A deve essere un'ellisse con B e C come fuochi.

In fisica l'ellisse risulta, il più delle volte, la traiettoria di un oggetto che si muove in un'orbita chiusa sotto l'influenza di una forza centrale che varia inversamente al quadrato della distanza. I pianeti e i satelliti, per esempio, hanno orbite ellittiche col centro

di gravità del corpo principale in uno dei fuochi. Quando Keplero annunciò per la prima volta la sua grande scoperta che i pianeti si muovono lungo ellissi, andò tanto contro l'opinione generale secondo la quale Dio non avrebbe permesso che i percorsi dei corpi celesti fossero meno perfetti dei cerchi, da sentire il bisogno di scusarsi. Egli parlò delle ellissi come scorie che aveva dovuto forzatamente introdurre per spazzare dall'astronomia un'altra più grande quantità di impurezze che vi si erano accumulate attorno ai tentativi di conservare le orbite circolari. Lo stesso Keplero non scoprì mai perché le orbite fossero ellittiche; toccò a Newton dedurlo dalla natura della gravitazione. Anche il grande Galileo nel giorno della sua morte rifiutava di credere, anche davanti alla sempre maggiore evidenza, che le orbite fossero non circolari.

Un'importante proprietà di riflessione dell'ellisse è illustrata in fig. 93. Si tracci una retta tangente all'ellisse in un punto qualsiasi. Le rette congiungenti questo punto con i fuochi formano angoli uguali con la tangente. Se pensiamo l'ellisse come una striscia di metallo disposta di taglio su una superficie piana, allora qualsiasi corpo o treno d'onde di impulsi, che esca secondo una retta da uno dei fuochi, colpirà il bordo e rimbalzerà direttamente verso l'altro fuoco. Inoltre se il corpo o l'onda si muove verso il bordo a velocità uniforme, prescindendo dalla direzione che prende quando parte da un fuoco, essa rimbalzerà nell'altro fuoco dopo lo stesso intervallo di tempo (poiché le due distanze hanno una somma costante). Imma-

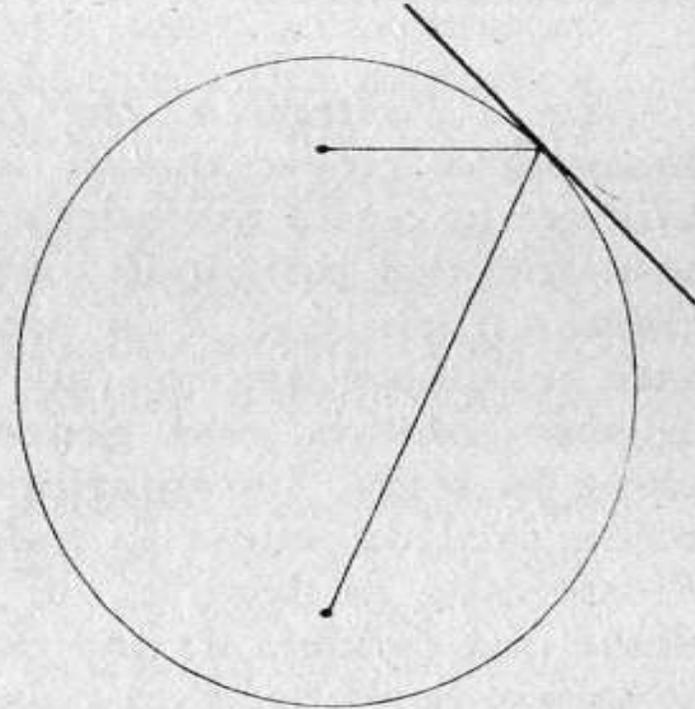


Fig. 93. La tangente forma angoli uguali con due linee.

giniamo un basso serbatoio pieno d'acqua. Se iniziamo un impulso ondulatorio circolare immergendo un dito nell'acqua in uno dei fuochi delle ellisse, un momento dopo vedremo una convergenza di onde circolari nell'altro fuoco.

Lewis Carroll inventò un tavolo da biliardo circolare e pubblicò un libretto su di esso. Non conosco alcuna seria proposta per un tavolo da biliardo ellittico, ma Hugo Steinhaus (nel suo libro *Mathematical Snapshots* ristampato recentemente in una edizione riveduta dalla Oxford University Press) dà una sorprendente triplice analisi di come si comporterebbe una palla su un tavolo del genere. Messa nel fuoco e tirata in una qualsiasi direzione, la palla rimbalzerebbe e passerebbe nell'altro fuoco. Ammettendo che non vi fosse attrito a rallentare il movimento della palla, essa continuerebbe a passare per uno dei fuochi ad ogni rimbalzo (fig. 94 a). Però dopo solo pochi passaggi il percorso diverrebbe indistinguibile dall'asse maggiore dell'ellisse. Se la palla non viene posta in un fuoco, ma viene spinta in modo che non passi fra i fuochi essa continua per sempre lungo percorsi tangenti ad un'ellisse minore con gli stessi fuochi (fig. 94 b). Se la palla viene lanciata fra i fuochi (fig. 94 c) essa viaggia indefinitamente lungo percorsi che non si avvicinano mai ai fuochi oltre una iperbole avente gli stessi fuochi.

Nell'operetta *The Mikado* vi sono dei versi su un giocatore di biliardo obbligato a giocare:

Su un panno grossolano / con una stecca storta / e con palle da biliardo ellittiche!

In *A Portrait of the Artist as a Young Man* di James Joyce un insegnante ripete questi versi e spiega che con « ellittico » W. S. Gilbert in realtà intendeva « ellissoidico ». Cos'è un ellissoide? Ve ne sono tre tipi principali: un ellissoide di rotazione, più propriamente chiamato sferoide, è la superficie di un solido ottenuto facendo ruotare un'ellisse attorno ad uno degli assi. Se la rotazione è attorno all'asse minore, essa genera uno sferoide oblato, appiattito ai poli come la terra. La rotazione attorno all'asse maggiore genera lo sferoide prolato, come la palla da rugby. Immaginiamo una superficie di sferoide prolato la cui faccia interna sia speculare. Se si accendesse una candela in uno dei fuochi, un pezzo di carta nell'altro fuoco si infiammerebbe d'un colpo.

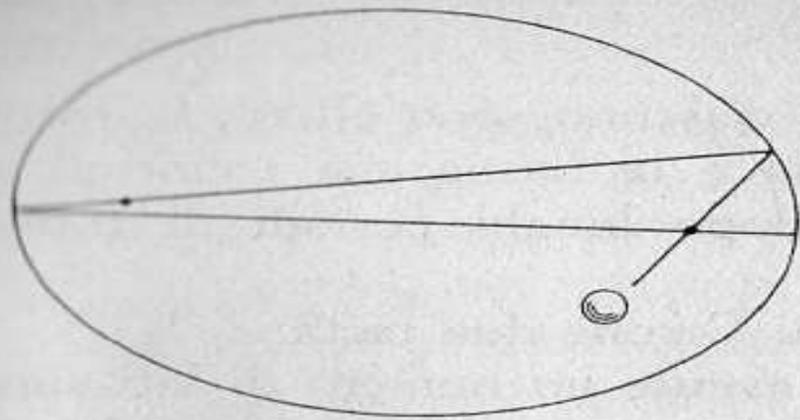


Fig. 94a. Percorso di una palla che passa sul fuoco di un'ellisse.

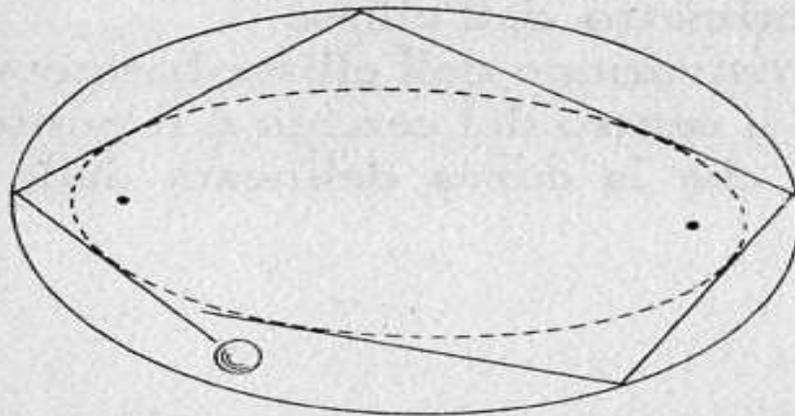


Fig. 94b. Percorso di una palla esterna ai due fuochi.

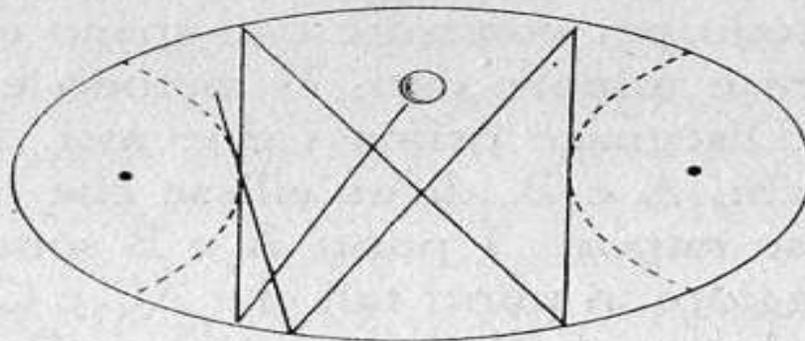


Fig. 94c. Percorso di una palla interna ai due fuochi.

Le stanze acustiche sono stanze dal soffitto sferoidale. Dei deboli suoni prodotti in uno dei fuochi possono esser uditi chiaramente nell'altro fuoco. Negli Stati Uniti la più nota galleria « dei sussurri » è la Statuary Hall nel Campidoglio di Washington (Non c'è gita che sia completa senza la dimostrazione). Una più piccola ma eccellente camera acustica è un'area quadrata appena fuori l'entrata all'Oyster Bar al piano più basso della Grande Stazione Centrale di New York. Due persone ferme nei due angoli diagonalmente opposti, rivolte verso il muro, possono udirsi distintamente anche quando l'ambiente quadrato ferve di attività.

Gli sferoidi sia oblati che prolatti hanno sezioni trasversali circolari quando sono secati da piani perpendicolari ad uno dei tre assi coordinati, sezioni trasversali ellittiche se secati da piani perpendicolari agli altri due assi. Quando tutti e tre gli assi sono di lunghezza

diversa, e le sezioni perpendicolari a ciascuno sono ellissi, la forma è un vero ellissoide (fig. 95). Questa è la forma che i ciottoli su una spiaggia tendono ad assumere dopo lunghi periodi di rotolamento provocato dalle onde.

I « rompicapo » ellittici sono rari. Eccone due facili.

1. Provare che nessun poligono, avente un numero di lati superiore a un quadrato, può esser disegnato su un'ellisse in modo che ogni vertice sia sul perimetro dell'ellisse.

2. Nel metodo di costruzione dell'ellisse basato sulla piegatura del foglio, prima indicato, il centro del cerchio e il punto sul cerchio sono i due fuochi. Provare che la curva delineata dalle piegature è realmente un'ellisse.

Appendice

Henry Dudeney, nel problema 126 di *Modern Puzzles*, spiega il metodo per costruire con spago e puntine un'ellisse avente assi maggiore e minore dati. Il metodo è semplice:

Disegnare prima i due assi. Il problema è ora di trovare i due fuochi, A e B, di un'ellisse che ha questi assi. Sia C l'estremità dell'asse minore. I punti A e B sono disposti simmetricamente sull'asse maggiore in punti tali che AC e CB siano ciascuno uguali a metà della lunghezza dell'asse maggiore. È facile dimostrare che un anello di spago di lunghezza uguale al perimetro del triangolo ABC servirà a disegnare l'ellisse desiderata.

Tavoli da biliardo di forme ellittiche sono stati messi realmente in vendita negli Stati Uniti nel 1964. Un annuncio a piena pagina nel *New York Times* (1 luglio 1964) diceva che il giorno successivo il gioco sarebbe stato presentato nei magazzini Stern dai divi Joanne Woodward e Paul Newmann. « Elliptipool », come viene chiamato, è una invenzione brevettata da Arthur Frigo, di Torrington, nel

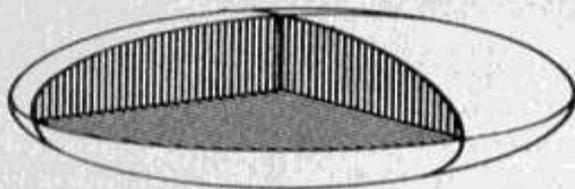


Fig. 95. Ogni sezione di ellissoide è ellittica.

Connecticut, allora studente diplomato dell'Union College a Schenectady. Dato che l'unica buca del tavolo è in uno dei fuochi, si possono fare con facilità svariati tiri strani di rimbalzo sulla sponda.

L'undicesima edizione della *Enciclopedia Britannica* nel suo articolo sui biliardi riporta una nota a piè di pagina che dice: « Nel 1907, tanto per cambiare, in Inghilterra fu introdotto un tavolo ovale ». Però né questo tavolo né quello circolare di Lewis Carroll avevano una buca. Un brevetto (n. 198.571) fu concesso nel luglio 1964 ad Edwin E. Robinson, di Pacifica, in California, per un tavolo da biliardo circolare con quattro buche.

Risposte

1. Nessun poligono regolare con un numero di lati superiore al quadrato può essere inscritto in un'ellisse per questo motivo: i vertici di tutti i poligoni regolari giacciono su un cerchio. Un cerchio non può intersecare un'ellisse in più di quattro punti. Perciò, nessun poligono regolare con più di quattro vertici può esser disposto con tutti i suoi vertici su un'ellisse. Questo problema è stato proposto da M. S. Klamkin al *Mathematics Magazine* del settembre-ottobre 1960.

2. La dimostrazione che il metodo della piegatura di un foglio di carta per la costruzione di un'ellisse produce effettivamente un'ellisse è il seguente. Sia il punto A in fig. 96 un punto qualsiasi su un cerchio di carta che non sia il centro del cerchio (O). Il foglio viene piegato in modo che un qualsiasi punto (B) sulla circonferenza cada su A. Cioè piegando la carta lungo XY. Dato che XY è l'asse di AB, deve essere BC uguale ad AC. È chiaro che $OC + AC = OC + CB$. $OC + CB$ è il raggio del cerchio, che non può variare, perciò anche $OC + AC$ deve essere costante. Dato che $OC + AC$ è la somma delle distanze del punto C da due punti fissi A ed O, il luogo di C (quando B si muove lungo la circonferenza) deve essere un'ellisse con A ed O come fuochi.

La piegatura XY è tangente all'ellisse nel punto C perché forma angoli uguali con le linee che congiungono C ai fuochi. Ciò viene stabilito facilmente notando che l'angolo XCA uguaglia l'angolo XCB, che a sua volta uguaglia l'angolo YCO. Dato che le piegature sono sempre tangenti all'ellisse, questa diviene l'involuppo dell'insieme in-

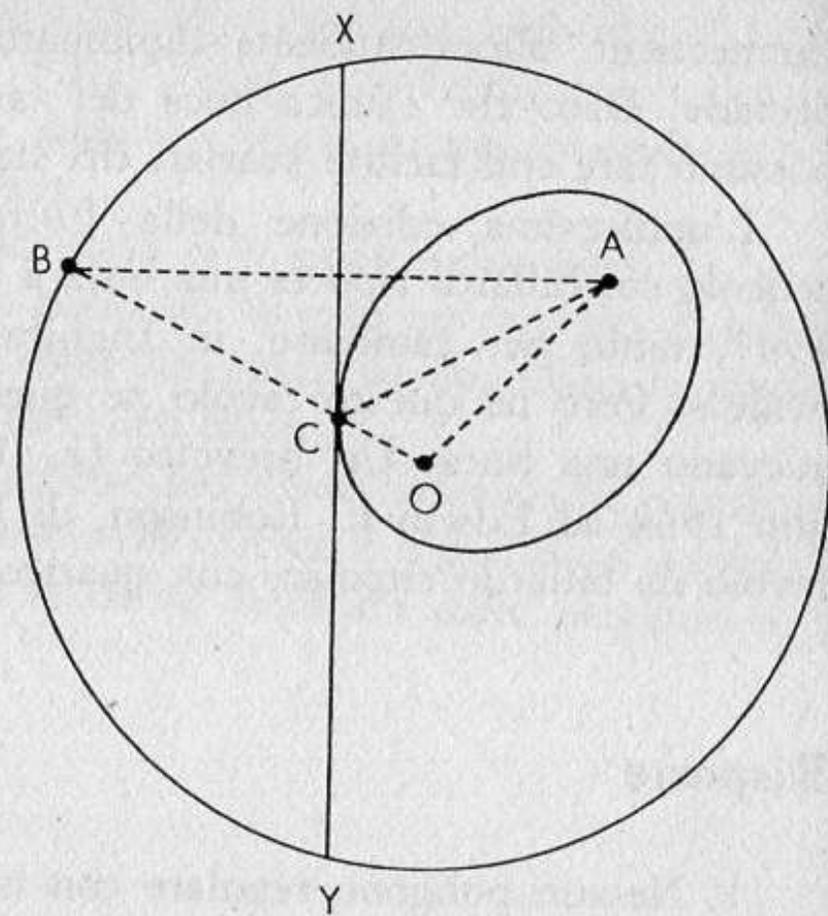


Fig. 96. Risposta al problema delle piegature della carta.

finito di piegature che può esser prodotto dalla ripetuta piegatura del foglio. Questa dimostrazione è presa dal volumetto di Donovan A. Johnson *Paper Folding for the Mathematics Class*, pubblicato nel 1957 dal Consiglio Nazionale degli Insegnanti di Matematica.

Hyperbolas



Lewis Carroll once wrote (in *The Dynamics of a Particle*):
“What mathematician has ever pondered over an hyperbola, mangling the unfortunate curve with lines of intersection here and there, in his efforts to prove some property that perhaps after all is a mere calumny, who has not fancied at last that the ill-used locus was spreading out its asymptotes as a silent rebuke, or winking one focus at him in contemptuous pity?”

Put a large sphere, say a basketball, on a light-colored tabletop in a darkened room. Shine a flashlight directly down on the ball as is shown at A in Figure 93. The ball's shadow is, of course, a circle. Its center is the point where the ball touches the surface of the table.

Move the flashlight toward the east as at B in the illustration. The shadow stretches to an ellipse. The center of the circle has now split into two points that are the foci of the ellipse. The sphere rests on the focus closer to the light source. As you move the light farther east, the other focus moves west, increasing the eccentricity of the ellipse.

Lower the light source until it is level with the top of the ball (C). The ball still rests on the eastern focus, but now the western focus has traveled to infinity. The outline of the shadow is a parabola.

Move the light until it is below the top of the ball (D). The curve

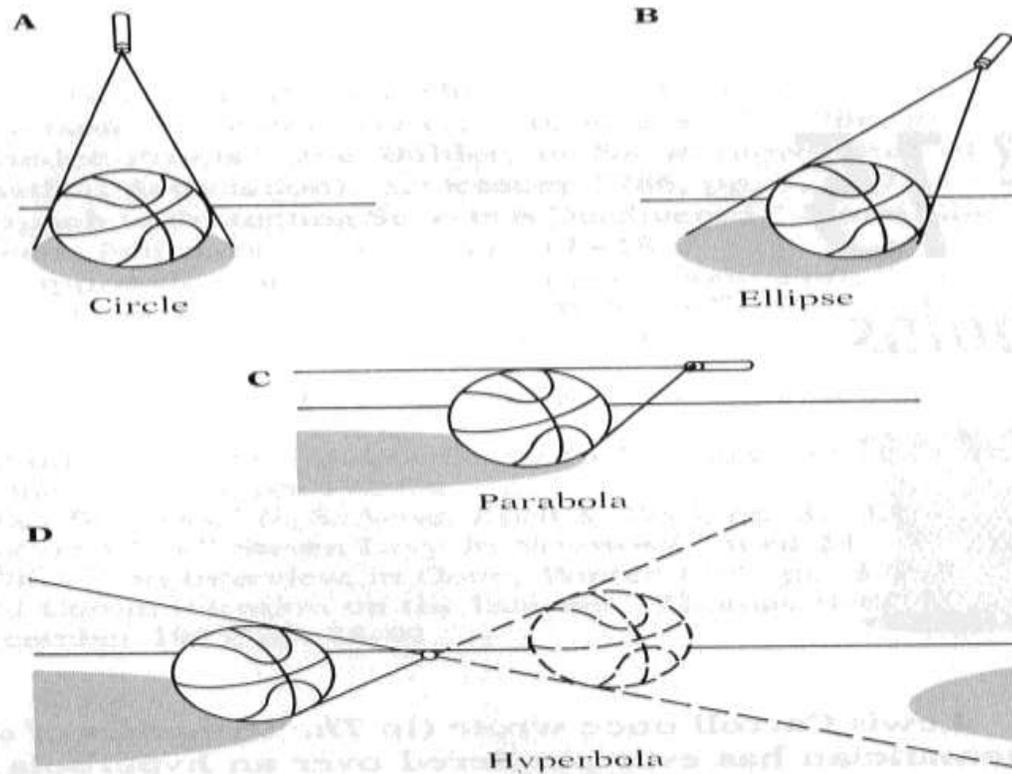


Figure 93 Shadow experiment displays four conicsection curves

of the shadow becomes a hyperbola. The sphere still touches the table at the focus of the hyperbola but now something delightful has happened to the missing focus.

Imagine that in all four pictures there is a counterball, identical with the sphere on the table but placed on the other side of the light source the same distance away. The counterball is shown with a broken line in the last picture (D). Note that it casts a shadow cone identical with the one produced by the ball on the table but turned the other way. The apexes of the cones meet at the light.

In the first three pictures the counterball's shadow lies above the plane of the tabletop. When the light source moves below the top of the ball, however, the countershadow falls on the plane to form a countercurve that is the eastern branch of the hyperbola under the ball. The missing focus has, so to speak, traveled around infinity to return on the other side! Since the two ends of infinity are one and the same point, they

are comparable to the extremities of a ring that has been cut and opened out into a straight line. This infinite, unmutilated ring is the geometric metaphor behind Henry Vaughan's famous couplet "I saw Eternity the other night / Like a great *Ring* of pure and endless light."

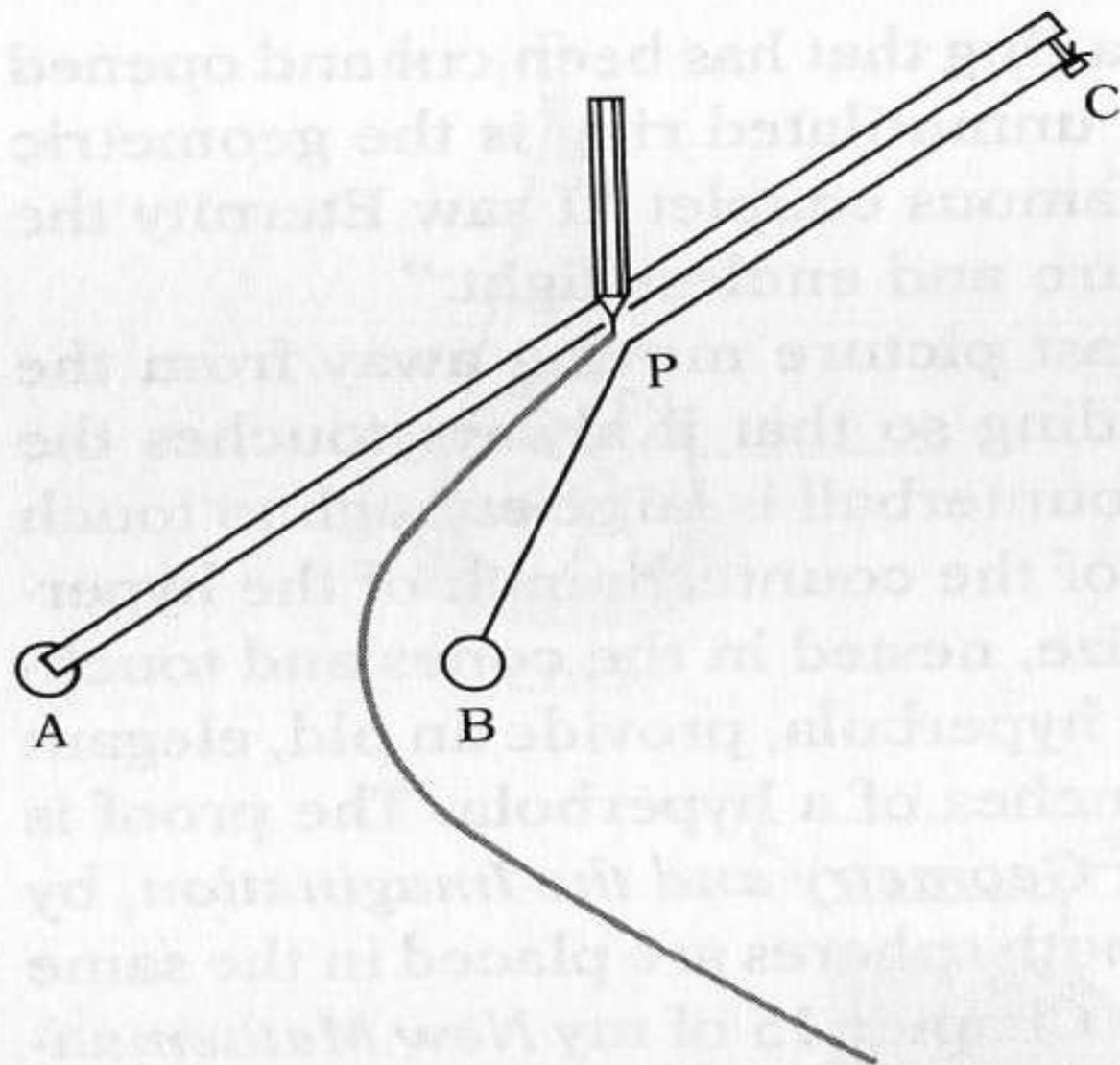
Imagine the counterball in the last picture moving away from the light source but continuously expanding so that it always touches the sides of the countercone. When the counterball is large enough to touch the tabletop, it will rest on the focus of the counterbranch of the hyperbola. These two spheres of unequal size, nested in the cones and touching the cutting plane at the foci of the hyperbola, provide an old, elegant proof that the curves are indeed branches of a hyperbola. The proof is clearly explained on pages 8 and 9 of *Geometry and the Imagination*, by David Hilbert and S. Cohn-Vossen. If both spheres are placed in the same cone, a similar proof can be used (see Chapter 15 of my *New Mathematical Diversions from Scientific American*) to show that a curve is an ellipse.

The shadow experiment I have been describing is a way of displaying the four curves as conic sections. The plane of the tabletop is the plane that cuts the cones. It is apparent that the circle is a limiting case of the ellipse. The parabola is a limit of both ellipse and hyperbola. Like the circle, it has only one shape, although the shape can be enlarged or diminished. Both the ellipse and the hyperbola, however, are infinite families of different shapes.

Astronomers often find it difficult to decide whether a comet or a meteor is traveling an elliptical, parabolic or hyperbolic path. It is easy to see why. Vary the parabola ever so slightly one way and it becomes an ellipse. Vary it ever so slightly the other way and it becomes a hyperbola. Comets in permanent orbit around the sun move on ellipses. Those that enter the inner solar system and then leave, never to return, move on parabolas or hyperbolas.

Since the hyperbola is a kind of ellipse split in half by infinity, it is not surprising that the two curves are related to each other in many inverse ways. An ellipse is the locus of all points whose distances from two fixed points have a constant sum. The two fixed points are called the foci of the curve. This is the basis for the ancient method of drawing an ellipse with a pencil and a loop of string that goes around two pins.

The hyperbola is the locus of all points whose distances from two fixed points have a constant difference. Figure 94 shows a string device for drawing one branch of a hyperbola. The pencil at P keeps the string taut and pressed against the rod as the rod rotates around its fixed end at focus A. The string is attached to focus B and to the rod's free end, C.



$$BP + PC = \text{filo}$$

$$PC = AC - AP$$

$$BP + AC - AP = \text{filo}$$

$$BP - AP = \text{filo} - AC$$

$$AP - BP = AC - \text{filo}$$

costante

Figure 94

String method of drawing a hyperbola

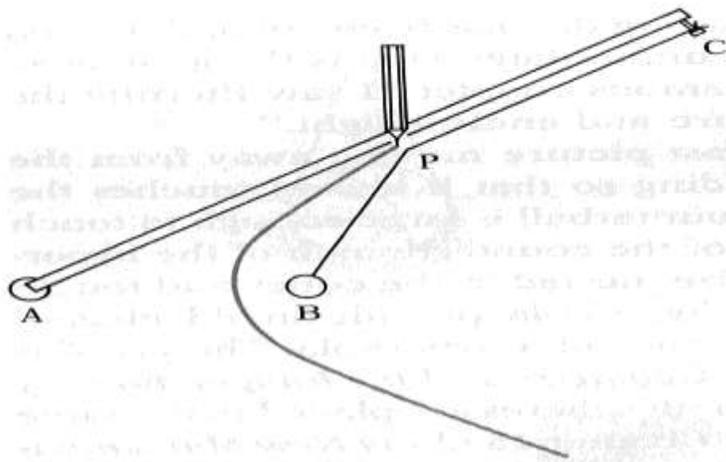


Figure 94
String method of drawing a hyperbola

$$\begin{aligned}
 BP + PC &= \text{file} \\
 PC &= AC - AP \\
 BP + AC - AP &= \text{file} \\
 BP - AP &= \text{file} - AC \\
 AP - BP &= AC - \text{file} \\
 &\quad \text{constante}
 \end{aligned}$$

$BP + PC$ is constant; therefore $AP - BP$ must also be constant. Since AP and BP are the distances of P from the two foci, we have proved that the curve must be a hyperbola.

Ellipses and hyperbolas are also easily produced by a paper-folding method that points up the inverse kinship of the curves. Draw a circle on a sheet of translucent paper such as waxed paper or tracing paper. Mark a spot anywhere inside the circle that is not at the circle's center. Fold the paper in a variety of ways each of which brings the spot onto the circumference of the circle. Each fold line is tangent to an ellipse. When enough folds have been made, the ellipse will take shape as the "envelope" of the tangents. The spot and the center of the circle are the two foci of the ellipse. To fold a hyperbola follow the same procedure with a spot anywhere *outside* rather than inside the circle. Both branches of the hyperbola appear in Figure 95. Again the spot and the center of the circle are the two foci of the curve.

Will a spot on the circumference of the circle give rise to a parabola? Unfortunately it will not. We can blame this perversity on the parabola's lost focus. Each fold line goes through the center of the circle and is therefore tangent to a degenerate ellipse whose length is the circle's radius and whose width is zero. To get a parabola we need a circle expanded to infinity so that its circumference is a straight line. Rule a line on the paper and pick a point off the line; now the same folding technique will produce a splendid parabola. The missing focus is the "center" of the infinite circle.

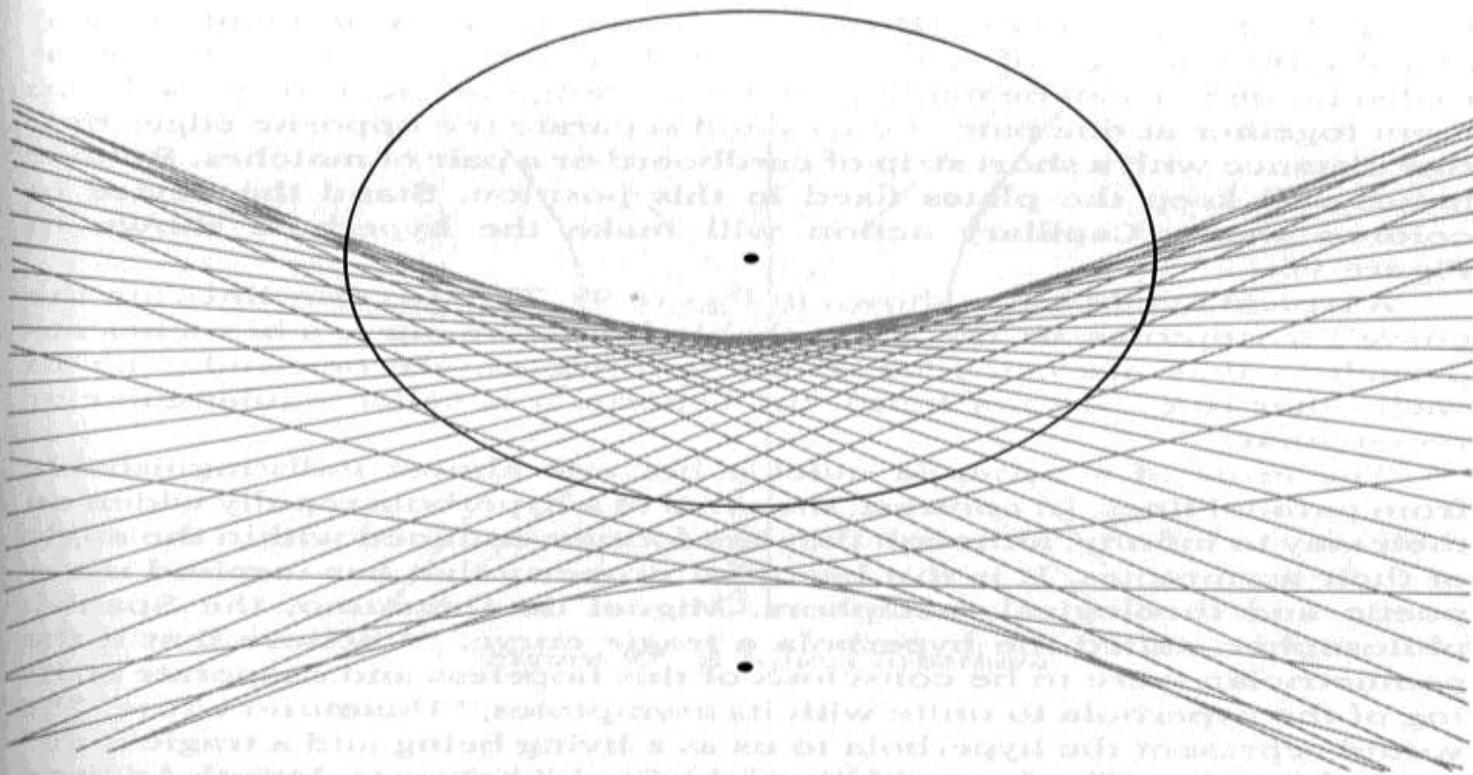


Figure 95 *Folding a hyperbola*

Of the four conic curves, the hyperbola is the curve least often observed in everyday life. Circles and ellipses are everywhere. We see parabolas whenever we water a lawn with a hose or watch the flight of a baseball.* One of the few times we see a complete hyperbola is when a lamp with a cylindrical or conical shade, open at both ends, throws shadows on a nearby wall. Our forebears saw a branch of a hyperbola on a wall when they held near the wall a candle burning in a candlestick with a circular base.

Scientists and mathematicians are constantly seeing hyperbolas as the graphs of various second-degree equations. Even the simple equation $ab = c$, where c is a constant, graphs as a hyperbola. It is the equation of

*Many readers quite properly chided me for saying that tossed objects follow paths that are parabolas. The paths are very close to parabolas, but strictly speaking (and ignoring air resistance) a tossed object follows an elliptical orbit around the earth's center of gravity.

hundreds of physical laws (Boyle's law and Ohm's law, to mention two) and also the equation of many economic functions. A simple experiment to display $ab = c$ can be made with two rectangular sheets of glass. Place them together at one pair of edges and separate the opposite edges by a tiny distance with a short strip of cardboard or a pair of matches. Rubber bands will keep the plates fixed in this position. Stand the device in colored water. Capillary action will make the hyperbola shown in Figure 96.

A typical hyperbola is shown in Figure 97. The two gray lines are the curve's asymptotes, or the unreachable limits the curve's branches approach as they are extended. If the asymptotes are perpendicular to each other (they are not here), the hyperbola is called equiangular or rectangular.

The arms of a parabola quickly become almost indistinguishable from parallel lines. In contrast, the arms of a hyperbola rapidly widen on their way to infinity, although they are forever confined within the angle of their asymptotes. It is this beautiful property that has inspired many poetic and theological metaphors. Miguel de Unamuno, the Spanish philosopher, called the hyperbola a tragic curve. "I believe that if the geometrician were to be conscious of this hopeless and desperate striving of the hyperbola to unite with its asymptotes," Unamuno wrote, "he would represent the hyperbola to us as a living being and a tragic one!"

In his essay "The Immortality of the Soul," however, Joseph Addison regarded the metaphor with optimism. After death the soul moves ever closer to God without ever becoming God. "We know not yet what we shall be, nor will it ever enter into the heart of man to conceive the glory that will be always in reserve for him. The soul, considered with its

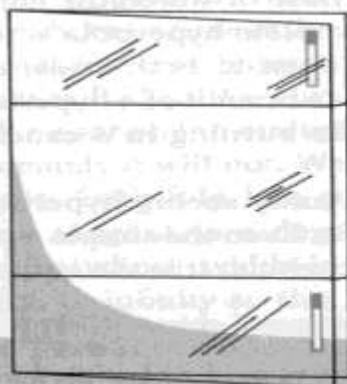


Figure 96
Hyperbola produced by
capillary action

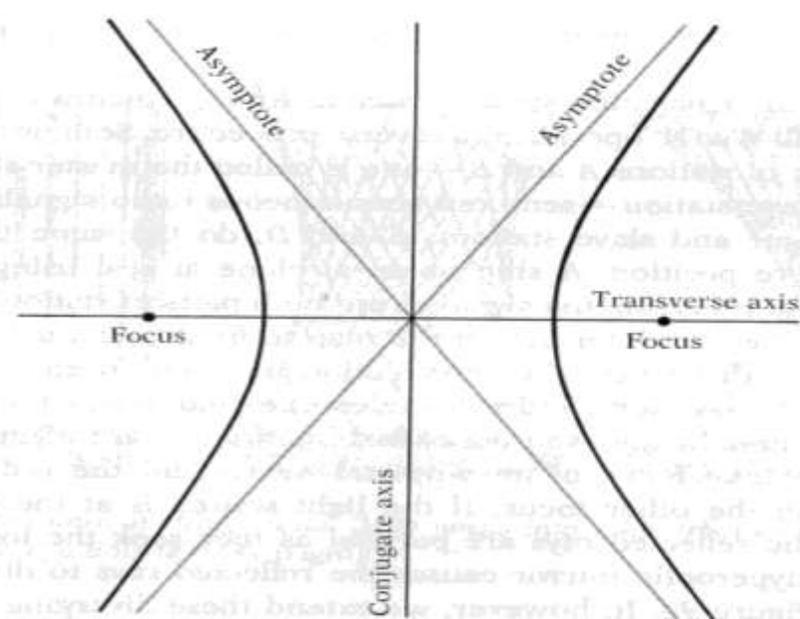


Figure 97 A typical hyperbola

Creator, is like one of those mathematical lines that may draw nearer to another for all eternity without a possibility of touching it."

Hyperbolas have a dramatic application in range-finding. To understand how this works consider a person A who fires a rifle at a distant gong B . Assuming that the ground is flat, where must one stand to hear the sound of the gun and the sound of the gong simultaneously?

Let x be the distance sound travels in the length of time it takes the bullet to travel from the gun to the gong. A and B are the foci of countless hyperbolas. The person who hears the sounds simultaneously must stand on a branch of a hyperbola (the one nearest the target) that is the locus of all points the difference of whose distances from A and B is x .

A distant sound can be located by two pairs of listening posts: A and B , C and D . Listeners at A and B record the time they hear the sound. Their clocks are synchronized so that they can obtain a precise difference between the two times. Call the difference x . The sound must come from a branch of a hyperbola (the one nearest the sound) that is the locus of all points the difference of whose distances from A and B is x . This curve is drawn on a map. Listeners at C and D do the same thing and plot a branch of another hyperbola on the same map. The spot where the

two curves intersect, nearer the sound's origin, gives the "fix" of the origin.

Hyperbolic navigation systems such as loran, which was developed during World War II, operate by a reverse procedure. Somewhere on the shore a pair of stations *A* and *B*—one is called the master station, the other the slave station—send out simultaneous radio signals. Another pair of master and slave stations, *C* and *D*, do the same thing from another shore position. A ship or an airplane at sea, using the time differences in receiving the signals from both pairs of stations, can plot two hyperbolas that intersect on the map to fix its location.

Mirrors with a hyperbolic cross section are found (usually with other kinds of mirrors) in some reflecting telescopes and special-purpose cameras and behind the light sources of flashlights and searchlights. If a light source is at one focus of an elliptical mirror, all the reflected rays converge on the other focus. If the light source is at the focus of a parabola, the reflected rays are parallel as they seek the lost focus at infinity. A hyperbolic mirror causes the reflected rays to diverge as is shown in Figure 98. If, however, we extend these diverging rays backward as is shown by the broken lines, they obligingly converge on the

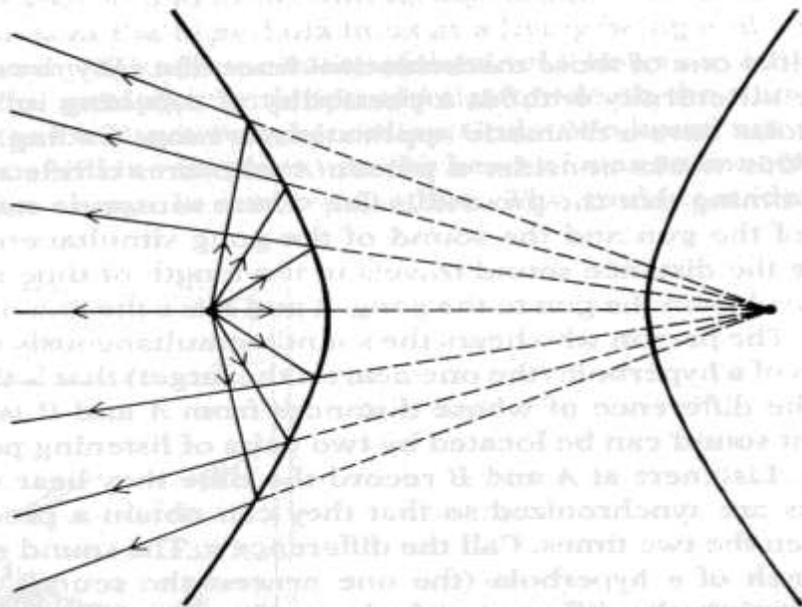


Figure 98 Reflected rays from light at one focus of a hyperbola find the other focus

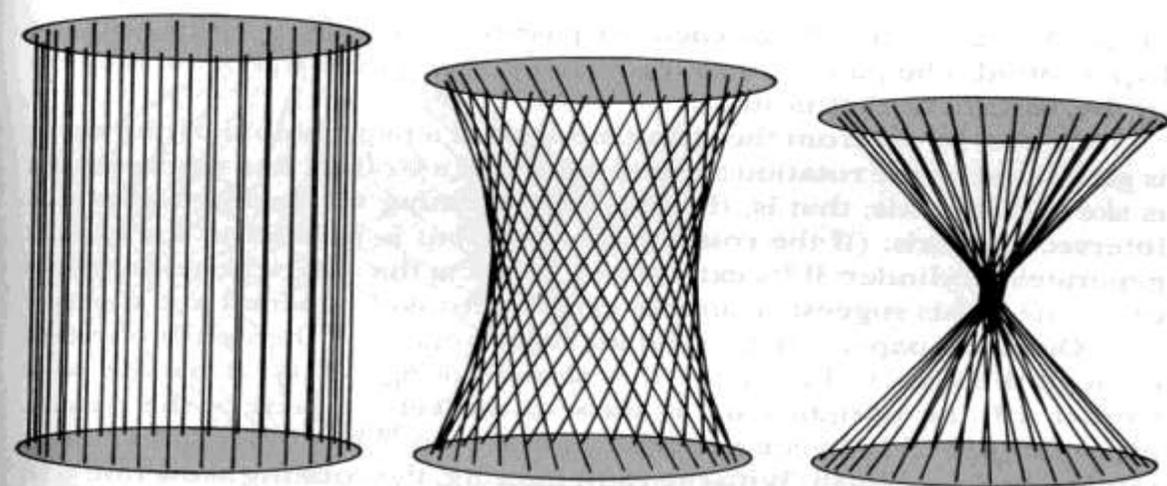


Figure 99 Cylindrical string model (left) twists into a hyperboloid (middle) and a double cone (right)

other focus. In a sense they have traversed the infinite and found the lost focus at a point just behind their origin.

A lovely hyperbolic surface with many remarkable properties is the "hyperboloid of one sheet," first described by Archimedes. A string model of this surface is shown in the middle of Figure 99. Vertical cross sections of the surface are hyperbolas and horizontal cross sections are ellipses. If the horizontal sections are circles, it is a "hyperboloid of revolution of one sheet," so called because it is generated by spinning a hyperbola around its conjugate axis. (If a hyperbola is rotated around its transverse axis, it generates a hyperboloid of rotation of two sheets: a pair of domelike structures separated by a finite distance.)

In 1669 Christopher Wren, the architect who designed St. Paul's Cathedral, reported an extraordinary discovery about the hyperboloid of one sheet. He showed that the hyperboloid of one sheet is what mathematicians now call a ruled surface, a surface consisting of an uncountable infinity of perfectly straight lines!

A cylinder, for example, is a ruled surface of parallel straight lines. A cone is a ruled surface of straight lines that meet at the apex of the cone. The hyperboloid is a ruled surface of two distinct families of straight lines. In the middle of Figure 99 you see some members of one set all slanting the same way with no two lines intersecting. The other family (which is not shown) is a mirror-image set, slanting the other way. Each line of one set, when extended, intersects each extended line of the

other. A straight line from each set passes through every point on the hyperboloid. The pair of lines through a point defines the plane tangent to the surface at that point.

It is easy to see from the string model that a hyperboloid of one sheet is generated by the rotation around an axis of a straight line segment that is skew to the axis; that is, the line incorporating the segment does not intersect the axis. (If the rotating line segment is parallel to the axis, it generates a cylinder; if its extension intersects the axis, it generates part of a cone.) This suggests a simple experiment with a pencil and a paper clip. Open the paper clip to form an acute angle and then push one end through the eraser of the pencil, as shown in Figure 100. Turn the wire so that *AB*, the upright part, is skew to the vertical axis of the pencil. Place the pencil between your palms and spin it by sliding your hands rapidly back and forth. With the right lighting, the rotating skew line will form a transparent hyperboloid.

If a cube is spun on one corner, its six skew lines generate a similar surface. With a little practice you can snap a die between your finger and your thumb and make it spin on a corner. Lower your head to view the spinning cube from the side. You will see in profile a hyperboloid between two cones, as shown in Figure 101.

Making the string model of Figure 99 is not difficult. Simply thread a string back and forth through holes evenly spaced around the rim of two cardboard or plywood disks. Spots of glue placed over the holes will keep the cord from sliding. When the disks are held apart to stretch the cord vertically, as they are at the left in the illustration, they model a cylinder. Twist one of the disks 180 degrees clockwise and the strings

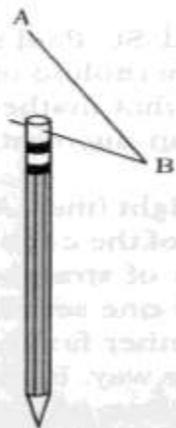


Figure 100 How to spin a hyperboloid

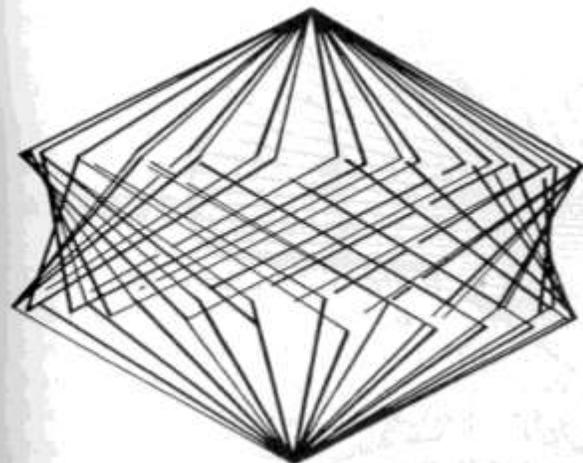


Figure 101
Hyperboloid between cones from spinning cube

model two cones as shown at the right. Between these two limits, twists produce an infinite family of hyperboloids such as the one shown in the middle of the illustration, ruled with straight strings that slant one way. Twist the disk counterclockwise and you can run through the mirror-image set of hyperboloids, ruled by strings slanting the other way.

A much more difficult model to make, built of rigid wires instead of strings, is described in *Geometry and the Imagination*, pages 16 and 17. The pair of wires at each intersection are joined by a universal joint that allows rotation but not sliding. You would expect such a structure to be rigid. Instead it is flexible in a curious way. If the model is compressed in one direction, the elliptical cross section degenerates into a straight line and the rods fold up into a vertical plane on which they form the envelope of a hyperbola. If the model is collapsed the other way, the rods fold down into a horizontal plane on which they form the envelope of an ellipse. Figure 102, based on a photograph in *Geometry and the Imagination*, shows how two hyperboloids of revolution can provide a gear transmission between two skew axes. The cogs of each gear are one of its sets of generating straight lines. This is only one of many ways that hyperboloids have been used in mechanical linkages.

A striking architectural use of a hyperboloid of revolution of one sheet is provided by the McDonnell Planetarium at Forest Park in St. Louis (see Figure 103). The designer, Gyo Obata, chose the surface because the hyperbolic paths of certain comets suggest, as he put it, "the drama and excitement of space exploration." Note the straight line of the shadow thrown by the circular roof as sunshine slants down on the

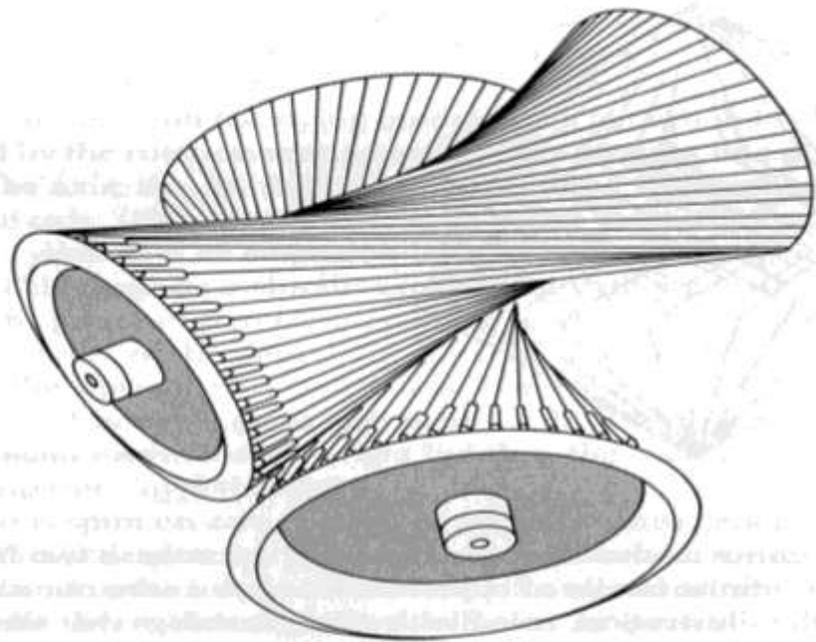


Figure 102 Hyperboloidal gears transmit motion to a skew shaft

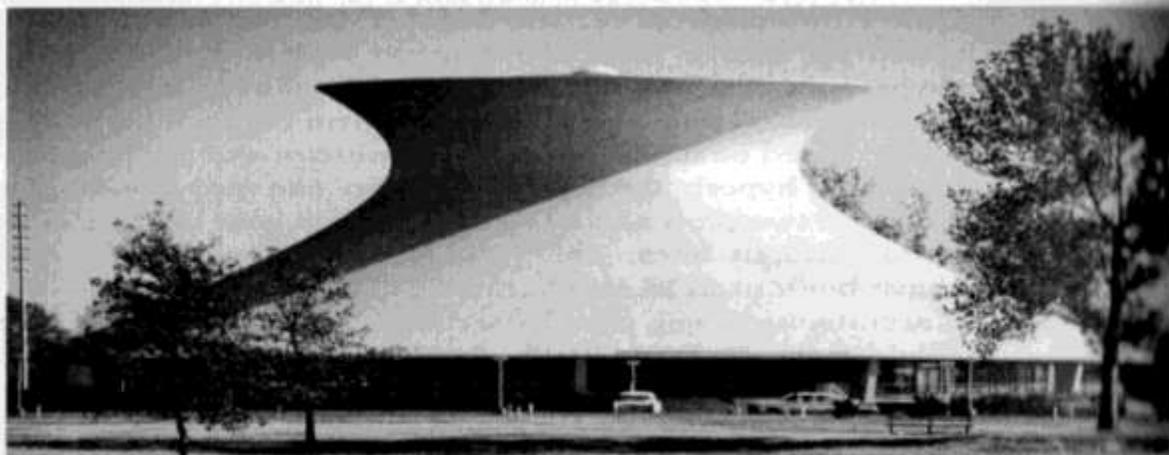


Figure 103 The McDonnell Planetarium in St. Louis, Mo.

planetarium. Is this shadow line one of the generating straight lines of the surface, or is it a space curve that appears straight only when viewed from the angle shown?

ANSWERS

Does the straight-line shadow on the photograph of the McDonnell Planetarium in St. Louis correspond to one of the straight lines that rule the surface of the structure's hyperboloid of revolution of one sheet? The answer is yes. At those times when the line containing the edge of the shadow intersects the sun, the edge of the shadow on the side of the planetarium coincides with a generating line of the surface. That line is a projection of a single point on the circumference of the circular top of the planetarium, not a projection of the entire circumference. When the sun is at any other elevation, the edge of the shadow will be a curved line and not a generating line of the surface.

ADDENDUM

Pierre Bézier wrote from Paris to tell me that hyperboloids of one sheet are often used for the construction of cooling towers at power stations. Because the concrete sides can be reinforced by straight steel bars (as in the model explained earlier), the structure is unusually sturdy. The conning towers of old battleships, Clyde Holvenstot informed me, were also often built the same way. He sent me a photograph from the *New York Times Book Review* (October 2, 1977) showing two such hyperboloid towers on the battleship *USS Michigan* before the Navy scrapped her.

Derek Ball, in a 1980 paper (see the Bibliography), discusses an unexpected appearance of hyperbolas in constructions involving lines that cut the area of an equilateral triangle into integral fractions. For example, if you draw across the triangle all straight lines that exactly bisect its area, the envelope of the lines is the small delta-shaped figure shown in Figure 104. Its sides are hyperbolas.

In my remarks about how to fold a circle to produce ellipses and hyperbolas and why such folding will not produce a parabola, I failed to acknowledge letters from Walter Cibulskis of the Illinois Institute of Technology, who called these facts to my attention.

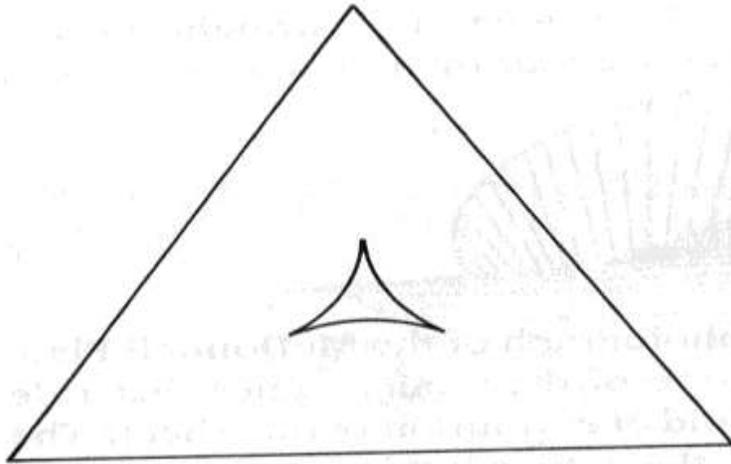


Figure 104
*Three hyperbolas form the envelope
of bisecting lines*

BIBLIOGRAPHY

- "Conic Sections." Henry Martin Taylor, in *Encyclopedia Britannica*, Ninth Edition. Encyclopedia Britannica, Inc., 1890.
- Geometry and the Imagination*. David Hilbert and S. Cohn-Vossen. Chelsea, 1952.
- A Book of Curves*. E. H. Lockwood. Cambridge University Press, 1961.
- "Halving Envelopes." Derek Ball, in *Mathematical Gazette*, 64, October 1980, pp. 166–172.

Parabolas

Mathematicians are constantly constructing and exploring the properties of abstract objects only because they find them beautiful and interesting. Later, sometimes centuries later, the objects may turn out to be enormously useful when they are applied to the physical world. There are no more elegant examples of this than the work done in ancient Greece on the four conic-section curves. Earlier articles of mine have dealt with three of them: circles, ellipses, and hyperbolas. This time we take a look at parabolas.



If a right circular cone is sliced by a plane parallel to its base, the cross section is a circle. Tip the plane ever so slightly and the section becomes an ellipse, the locus of all points with distances from two fixed points (foci) that have a constant sum. Think of the circle as an ellipse with foci that have merged to become the center of the circle. As the cutting plane tips at progressively steeper angles, the two foci move farther apart and the ellipses become progressively more “eccentric.” When the plane is exactly parallel to the side of the cone, the cross section is a parabola. It is a limit curve, like the circle, only now one focus has vanished by moving off to infinity. It is an ellipse, as Henri Fabre once put it, that “seeks in vain for its second, lost center.”

As you follow the parabola’s arms toward infinity, they get progressively closer to being parallel without ever making it except at infinity. Here is how Johannes Kepler put it in a discussion of conic sections:

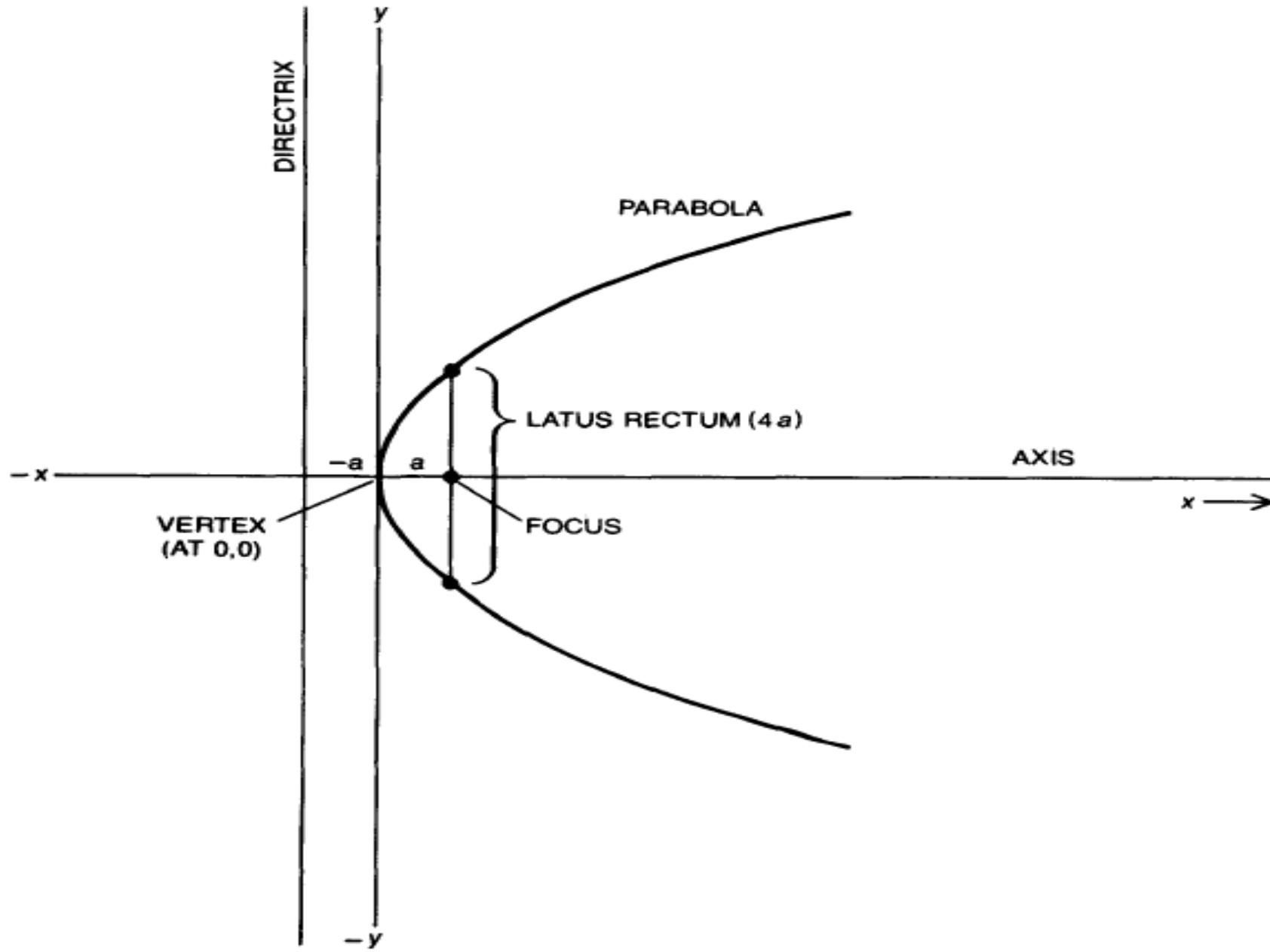
Because of its intermediate nature the parabola occupies a middle position [between the ellipse and the hyperbola]. As it is produced it does not spread out its arms like the hyperbola but contracts them and brings them nearer to parallel, always encompassing more, yet always striving for less—whereas the hyperbola, the more it encompasses, the more it tries to obtain.

A parabola is the locus of all points in a plane whose distance from a fixed line (the directrix) is equal to its distance from a fixed point (focus) not on the line. Figure 129 shows the traditional way of graphing a parabola so that its Cartesian-coordinate equation is extremely simple. Note that the axis of the parabola passes through the focus at right angles to the directrix, and that the tip of the curve, called the vertex, is at the 0,0 point of origin. The chord passing through the focus, perpendicular to the axis is the parabola's latus rectum, or focal width. Let a be the distance from the focus to the vertex. Obviously a

is also the distance from the vertex to the directrix. It is not hard to prove that the latus rectum must be $4a$. The parabola can now be described as the locus of all points on the Cartesian plane given by the parabola's type equation: $y^2 = 4ax$. If $y^2 = x^2$, the parabola's vertex is at $0,0$. More generally, any quadratic equation of the form $x = ay^2 + by + c$, where a is not zero, graphs as a parabola, although not necessarily a parabola positioned like the typical one shown in the illustration.

A surprising property of the parabola is that all parabolas have the same shape. To be sure, pieces of parabolas, like the two shown in Figure 130, have different shapes. If you think of either segment as being extended to infinity, however, you can take the other one, make a

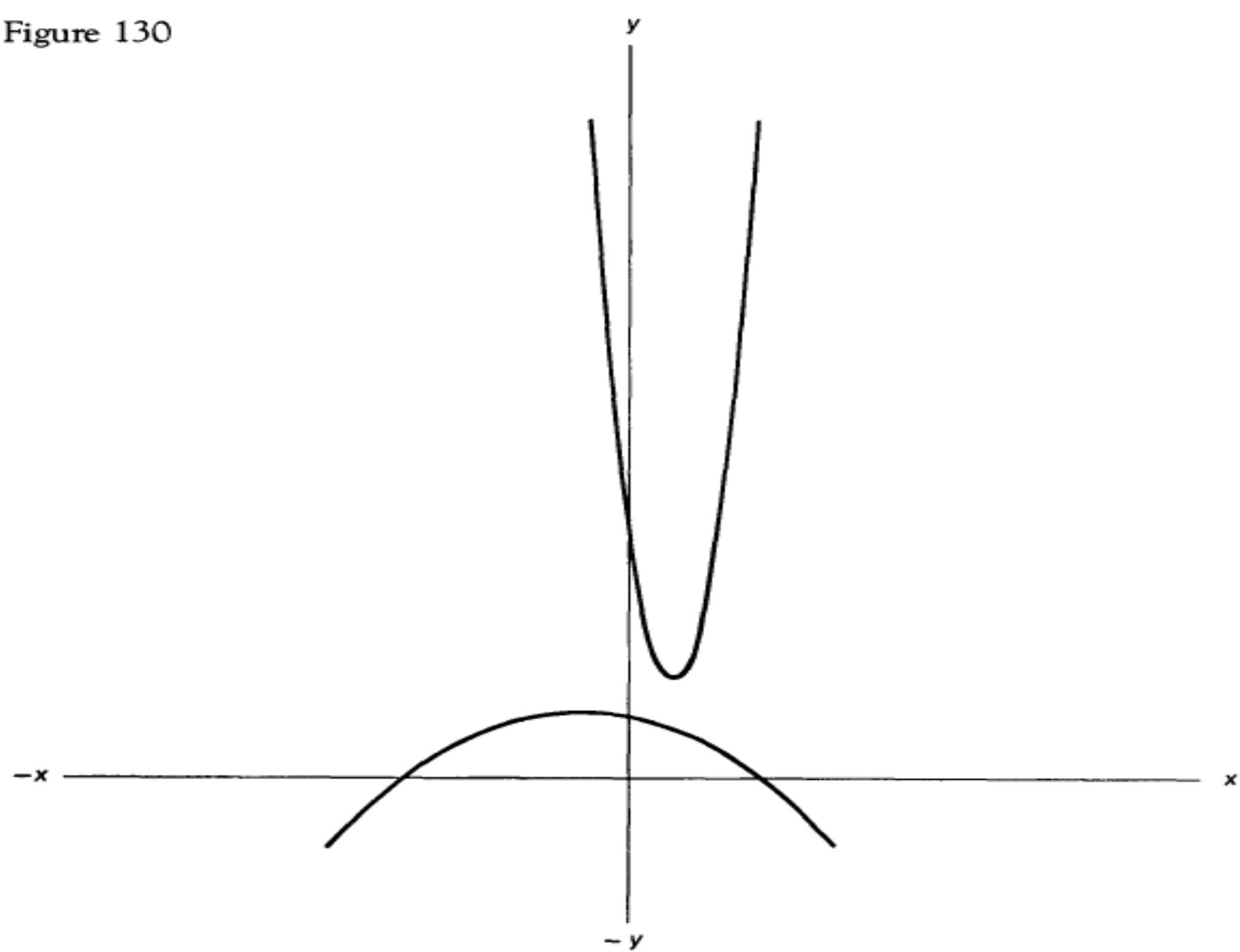
Figure 129



suitable change of scale and then place it somewhere on the infinite curve where it will exactly fit.

This property of varying only in size is one the parabola shares with the circle, although not with ellipses and hyperbolas. All circles are similar because single points are similar. All parabolas are similar because all pairs of a line and a point not on the line are similar. To put it another way, any directrix–focus pair will coincide with any other by a suitable dilation, translation, and rotation. Any parabola, drawn on graph paper of the right size and properly positioned, can be given any desired quadratic formula of the form $x = ay^2 + by + c$.

Figure 130



If you throw a stone horizontally, it follows a path close to a parabola, as Leonardo da Vinci conjectured in the 1490s, and Galileo proved in 1609, although he did not publish his proof until 30 years later. You can repeat one of Galileo's experiments by rolling a marble dipped in ink sideways across an inclined plane. If the plane is covered with graph paper, the path recorded by the marble will enable you to calculate the curve's parabolic formula. In actual practice the parabolic path of a projectile is slightly distorted by the earth's roundness and much more by air resistance.

In Galileo's *Dialogues Concerning Two New Sciences* he discusses at length the distorting influence of both the earth's not being flat and the air's viscosity. It is amusing to note that he discounts the deviation caused by the earth's roundness as being negligible because the range of military projectiles "will never exceed four miles."

The resistance of air to the flight of a bullet gives rise to a trajectory so resembling the curve of a breast that one of Norman Mailer's army officers, near the end of his novel *The Naked and the Dead*, sketches several pictures of the curve and muses:

That form . . . is the fundamental curve of love, I suppose. It is the curve of all human powers (disregarding the plateau of learning, the checks upon decline) and it seems to be the curve of sexual excitement and discharge, which is after all the physical core of life. What is this curve? It is the *fundamental path of any projectile*, of a ball, a stone, an arrow (Nietzsche's arrow of longing) or of an artillery shell. It is the curve of the death missile as well as an abstraction of the life-love impulse; it demonstrates the form of existence, and life and death are merely different points of observation on the same trajectory. The life viewpoint is what we see and feel astride the shell, it is the present, seeing, feeling, sensing. The death viewpoint sees the shell as a whole, knows its inexorable end, the point toward which it has been destined by inevitable

physical laws from the moment of its primary impulse when it was catapulted into the air.

To carry this a step further, there are two forces constraining the projectile to its path. If not for them, the missile would forever rise on the same straight line. ↗ These forces are gravity and wind resistance and their effect is proportional to the square of the time; they become greater and greater, feeding upon themselves in a sense. The projectile wants to go this way ↗ and gravity goes down ↓ and wind resistance goes ←. These parasite forces grow greater and greater as time elapses, hastening the decline, shortening the range. If only gravity were working, the path would be symmetrical



it is the wind resistance that produces the tragic curve



In the larger meanings of the curve, gravity would occupy the place of mortality (what goes up must come down) and wind resistance would be the resistance of the medium . . . the mass inertia or the inertia of the masses through which the vision, the upward leap of a culture is blunted, slowed, brought to its early doom.

A jet of water from a hose also follows an almost perfect parabola. If when you water a lawn you slowly lower the angle of the hose jet from the near vertical to the near horizontal, the tops of the parabolic jets trace an ellipse, but the envelope of the jets is another parabola.

Some comets may follow parabolic paths. Comets that return periodically to the solar system move along extremely eccentric elliptical paths, but (as we have seen) the more eccentric an ellipse is, the closer

it resembles a parabola. Since the parabola is a limit between the ellipse and the hyperbola, it is almost impossible to tell from observing a comet near the sun whether it is following an extremely eccentric ellipse (in which case it will return) or a parabola or hyperbola (in which case it will never return). If the path is parabolic, the comet's velocity will equal its escape velocity from the solar system. If the velocity is less, the path is elliptical; if it is more, the path is hyperbolic.

The parabola's outstanding applications in technology are based on the reflection property displayed in Figure 131. Draw a line from the focus f to any point p , and draw tangent ab to the curve at p . A line cd , drawn through p so that angle apf equals angle bpd , will be perpendicular to the directrix. It follows that if the parabola is viewed as a reflecting line, any ray of light from the focus to the curve will rebound along a path parallel to the curve's axis.



Imagine now that the parabola is rotated about its axis to generate the surface called a paraboloid. If light rays originate at the focus, the paraboloid will reflect the rays in a beam parallel to the axis. That is the principle behind the searchlight. Of course the principle also works the other way. Rays of light, parallel to the axis, shining into a concave mirror with a paraboloid surface, will all be directed toward the focus. That is the secret of reflecting telescopes, solar-energy concentrators, and microwave receiving dishes. Because large paraboloid mirrors are easier to build than transparent lenses of comparable size all giant telescopes are now of the reflecting type. Other optical devices serve to bring the image from the focus to an eyepiece or a photographic plate. As a child you may have learned how to set fire to a piece of paper by focusing the sun's rays with a glass lens. It can be done just as efficiently with a paraboloid mirror, with the paper held at the surface's focus.

If a pan of water is rotated, the surface of the water forms a paraboloid. This suggested to the physicist R. W. Wood that perhaps a reflect-

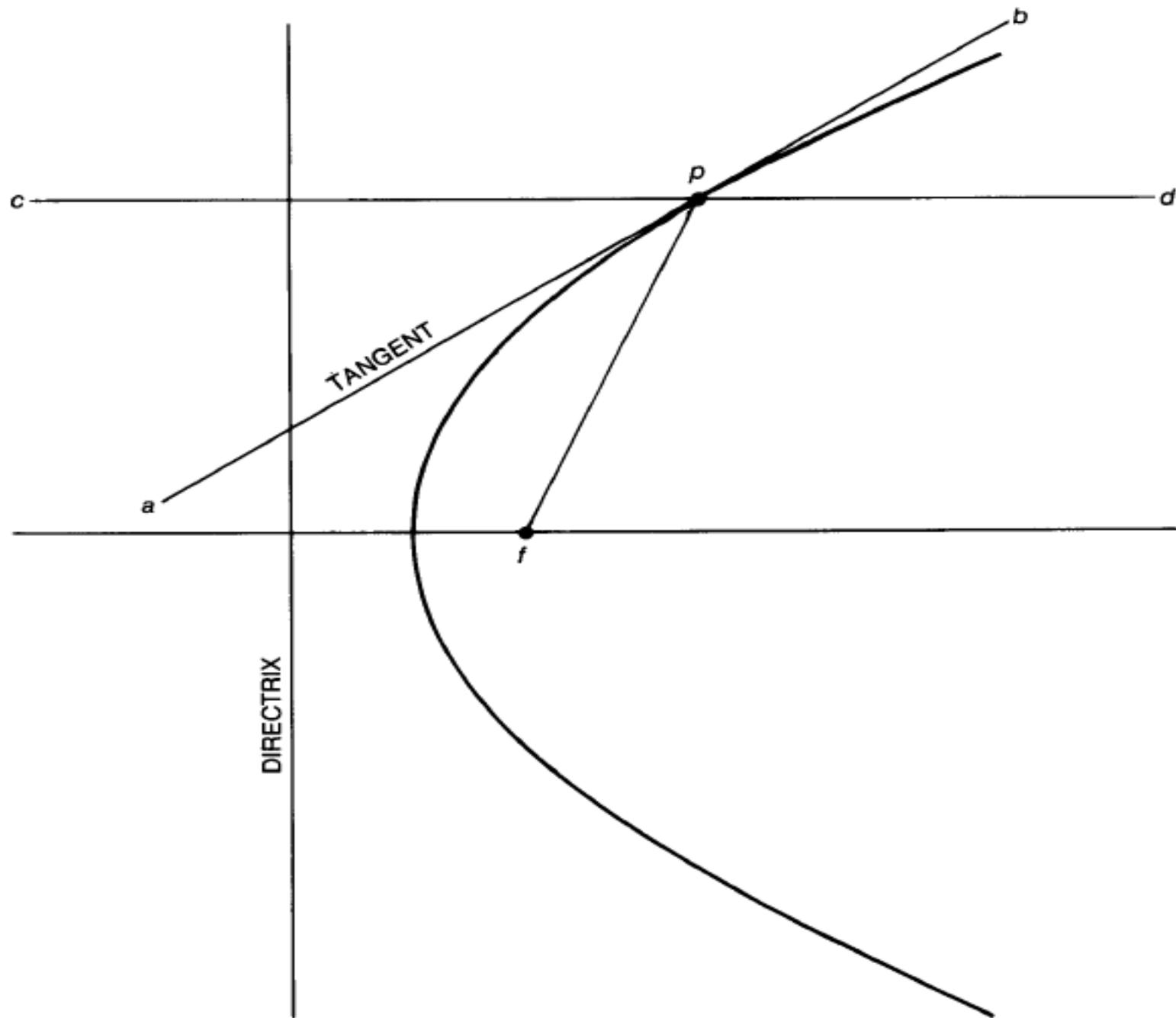


Figure 131

ing telescope could be made by rotating a large dish of mercury and exploiting the paraboloid surface as a mirror. He actually built such a telescope, but there were so many difficulties in making the surface sufficiently smooth that the idea had to be abandoned.

Assume that a paraboloid has a flat base perpendicular to its axis, so that it looks like a rounded hill. How do you calculate its volume? Archimedes found the amazingly simple formula. The volume is precisely 1.5 times that of a cone with the same circular base and the same axis.

A parabola is closely approximated by the cables that support a suspension bridge. The curve is distorted if the weight of the bridge is

Courtesy of the National Park Service, Jefferson National Expansion Memorial.

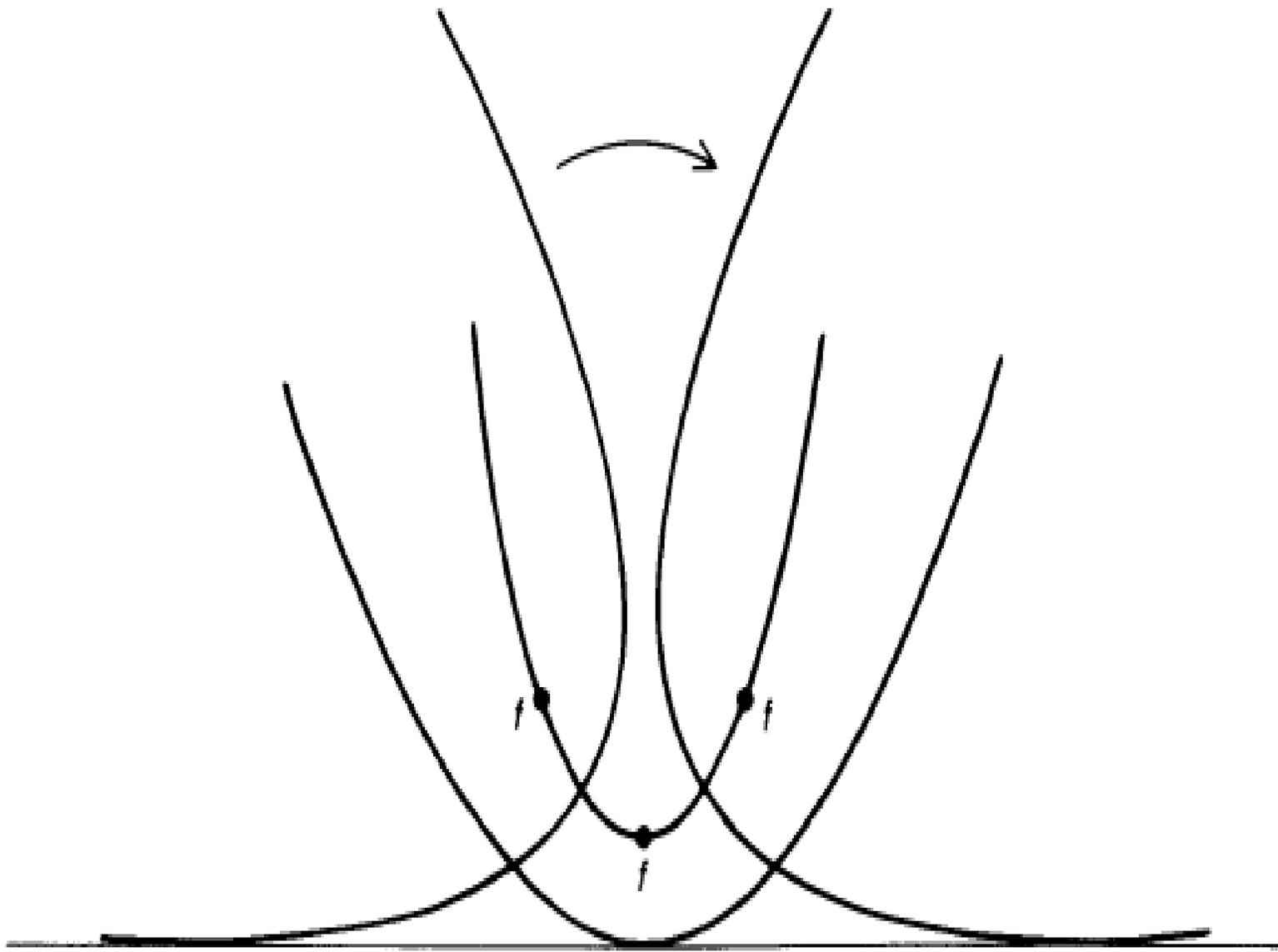


The Gateway Arch at the Jefferson National Expansion Memorial in St. Louis, Missouri is the largest such arch. It rises 630 ft. above the ground at its center and the feet stand 630 ft apart.

not uniform or if the weight of the cables is great in relation to that of the bridge. In the latter case the curve is hard to distinguish from the one known as a catenary (from the latin *catena*, chain). Galileo mistakenly thought the curve formed by a chain suspended at the ends was a parabola. Decades later it was shown to be a catenary, a curve that is not even algebraic because its equation contains the transcendental number e .

There is a curious relation between the parabola and the catenary that is not well known. If you roll a parabola along a straight line, as shown in Figure 132, top, the “locus of the focus” is a perfect catenary. Perhaps more surprising (although it is easier to prove) is what happens when two parabolas of the same size are placed with their vertexes touching and one is rolled on the other as shown in Figure 132, bottom. The focus of the rolling parabola moves along the directrix of the fixed parabola, and its vertex traces a cissoid curve!

One of the earliest problems concerning parabolas was that of “squaring” the area of a section of the curve bounded by a chord, such as the shaded region in Figure 133. The problem was first solved by Archimedes in his famous treatise *Quadrature of the Parabola*. By an



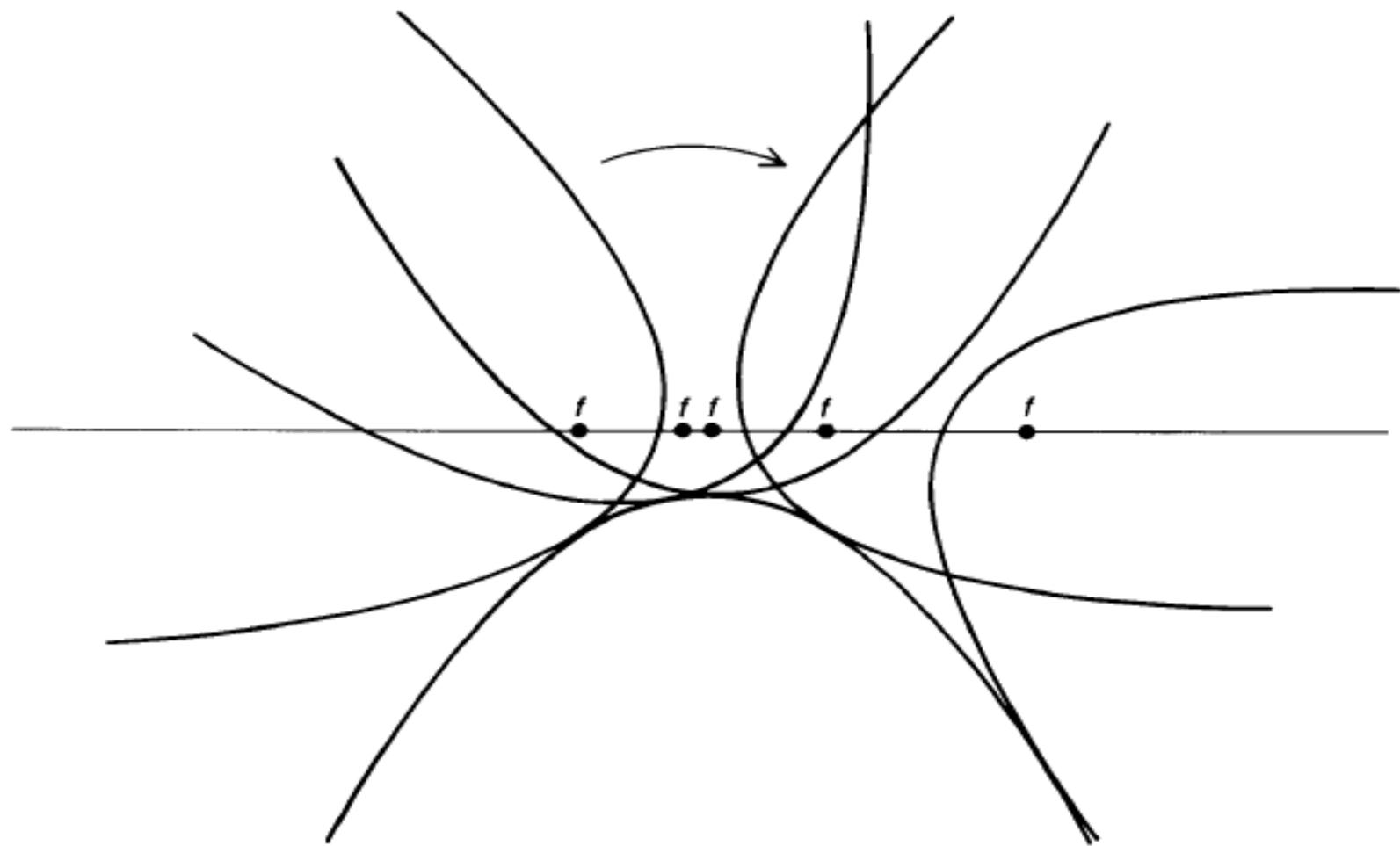


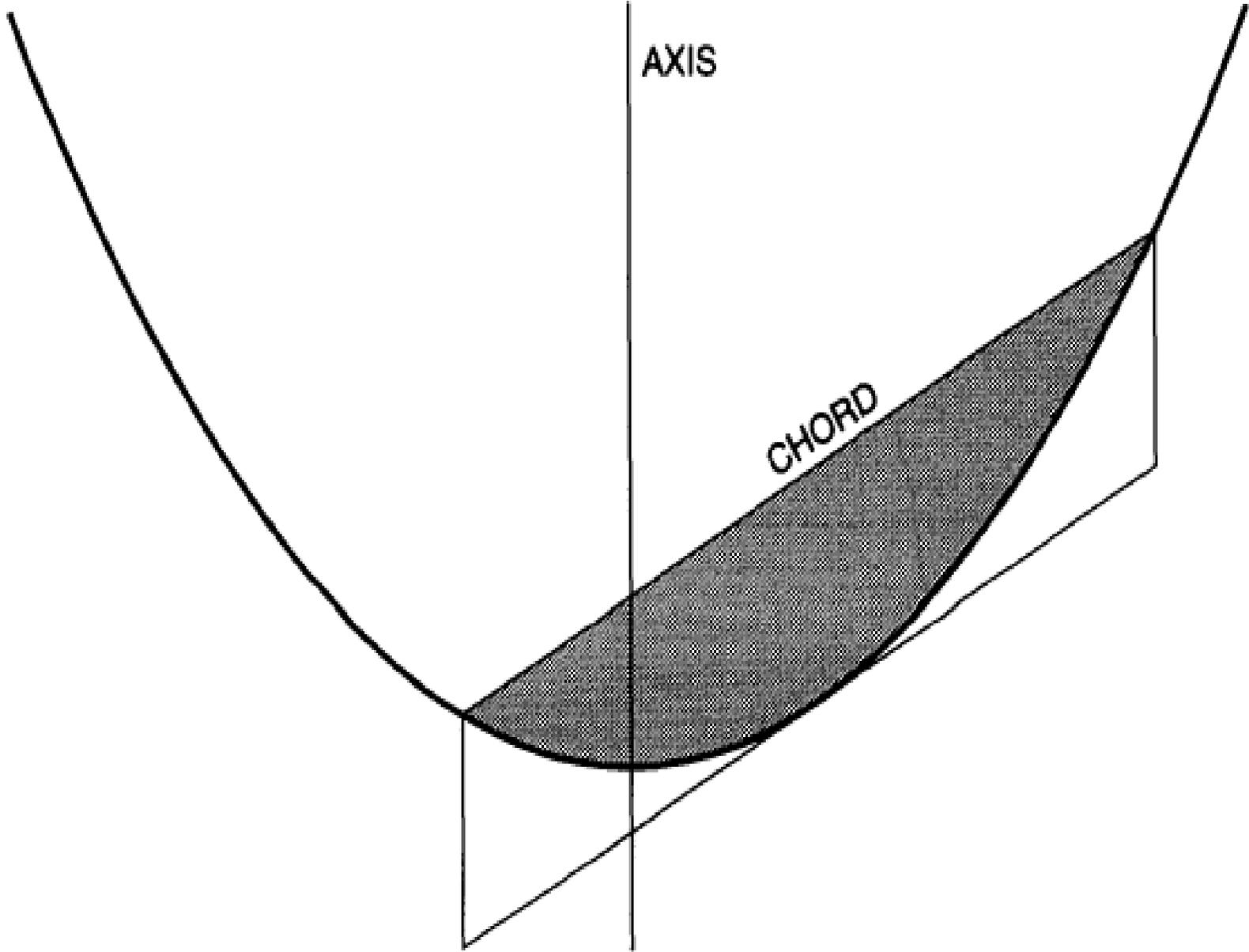
Figure 132

ingenious method of limits that anticipated the integral calculus, he was able to prove that if you circumscribe a parallelogram as is shown in the illustration, with its sides parallel to the parabola's axis, the area

of the parabolic segment is $\frac{2}{3}$ that of the parallelogram. (Archimedes first guessed this by comparing the weight of the parallelogram with the weight of the segment.) Archimedes also used the parabola for an elegant way to construct the regular heptagon. Earlier geometers had exploited parabolas for the classic task of doubling the cube: constructing a cube with twice the volume of a given cube.

There are many techniques for drawing parabolas without having to plot myriads of points on a sheet of paper. Perhaps the simplest relies on a T square and a piece of string. One end of the string is attached to a corner of the T square's arm as shown in Figure 134, and the other end is attached to the parabola's focus. The string must have a length AB . A pencil point at x , pressing against the arm of the T square, keeps the string taut. As the T square slides along the directrix, the pencil moves up the side of the T square to trace the parabola's right arm. Reflecting the arrangement to the other side draws the left arm. This method was invented, or possibly reinvented, by Kepler. You can work with a right triangle or a rectangle instead of a T square and slide it

Figure 133



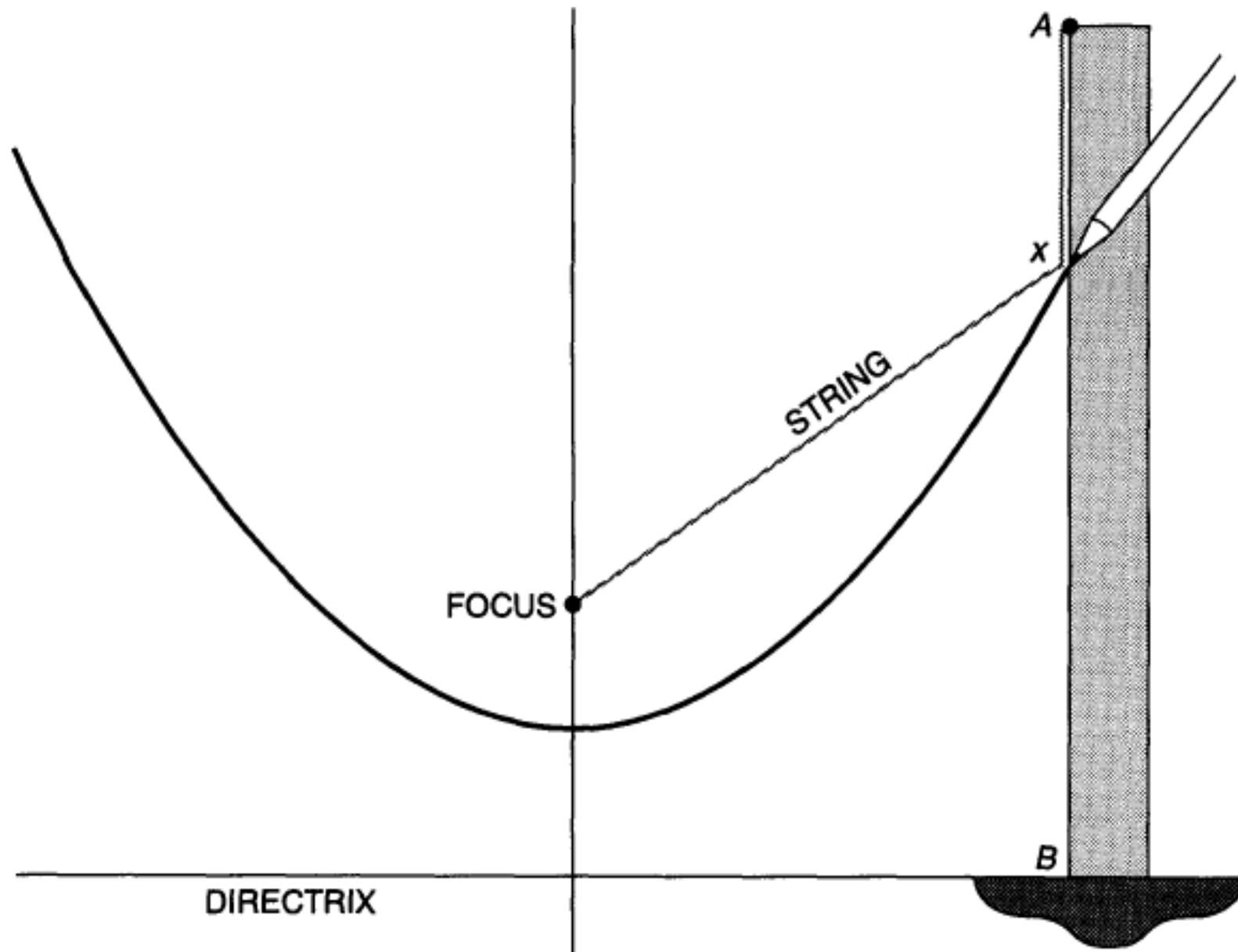


Figure 134

along the edge of a ruler. It is easy to see that the string's constant length ensures that any point on the curve is equally distant from the focus and the directrix.

Lovely parabolas can be produced more easily by paper folding. Just mark a focus point anywhere on a sheet of translucent paper, rule a directrix, and fold the sheet many times so that the line goes through the point each time. Each crease will be tangent to the same parabola, outlining the curve shown in Figure 135. If the paper is opaque, use one edge of the sheet for the directrix, folding it over to meet the point.

Familiarity with parabolas can often provide quick answers to algebraic questions. Consider, for example, this pair of simultaneous equations involving the two lucky numbers of craps:

$$x^2 + y = 7$$

$$x + y^2 = 11$$

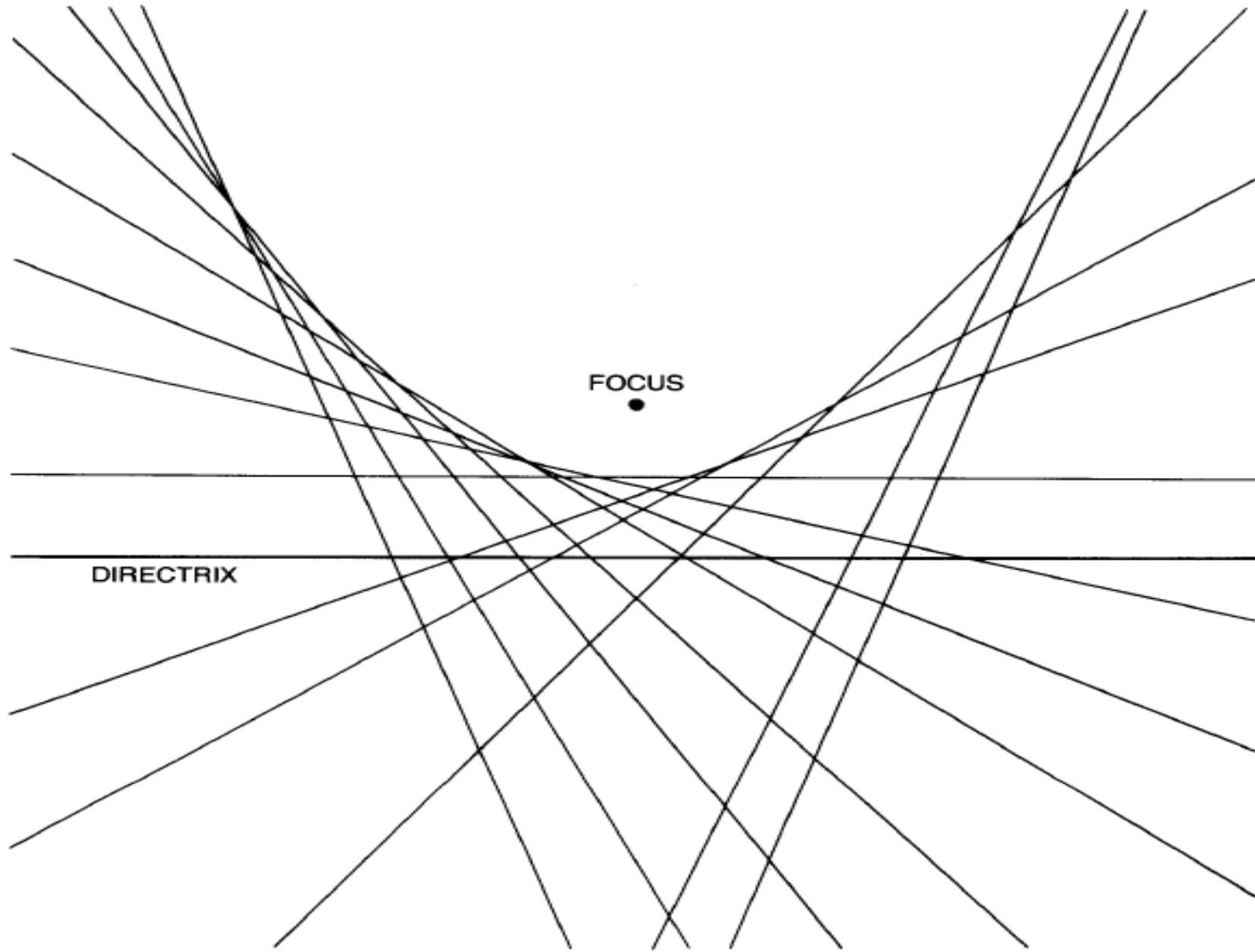


Figure 135

It does not take long to discover that if x equals 2 and y equals 3, both equations are satisfied. Let us ask two questions:

1. Are there other integral solutions (where x and y are whole numbers, positive or negative)?
2. How many solutions are there altogether?

A more difficult problem, for which a parabola gives an answer, comes from Ronald L. Graham of Bell Laboratories, who both framed and solved it. It is published here for the first time. Imagine that you have an infinite supply of identical disks with a diameter less than $1/2$

of some unit distance, say $1/10$. Is it possible to put all of them in a plane, without overlapping, so that no distance between any pair of points in the disks is an integer?

Since each disk is only $1/10$ in diameter, no two points on the same disk can be an integral distance apart, but it is conceivable that by a clever arrangement of disks, with their centers on a straight line, no point in one disk will be an integral distance from a point in any other disk. It is not difficult to prove that it is impossible. In fact, any arrangement of an infinity of disks on a straight line will create an infinity of pairs of disks in which an infinity of pairs of points (all exactly on the line) will be separated by integral distances.

To see how it works suppose you have placed a disk of diameter $1/10$ on the line as shown by the unshaded circle in Figure 136, top. The shaded circles (marked a) are spaced with their centers a unit distance apart, extending to infinity in both directions. Clearly no second disk can be put on the line where it overlaps or touches a shaded circle; otherwise the disk will contain a point on the line that is an integral distance from a point on the line in disk a . (We assume that points on the circumference of a disk are in the disk.)

It is possible, of course, to put a second disk on the line between any pair of adjacent circles provided it does not touch or overlap either circle. For example, a second disk b can be placed as shown at the bottom of Figure 136. At once the line acquires another infinite set of circles (shaded and labeled b') at regular unit spacings, indicating that no third disk can be put where it overlaps or touches them. The same holds for additional disks. Since no more than eight disks will go without touching or overlapping in the finite space separating any pair of the first set of circles, it follows that no more than nine disks can be put on the line. A 10th disk, added anywhere, will contain an infinity of points that are integral distances from points in one of the nine previously positioned disks.

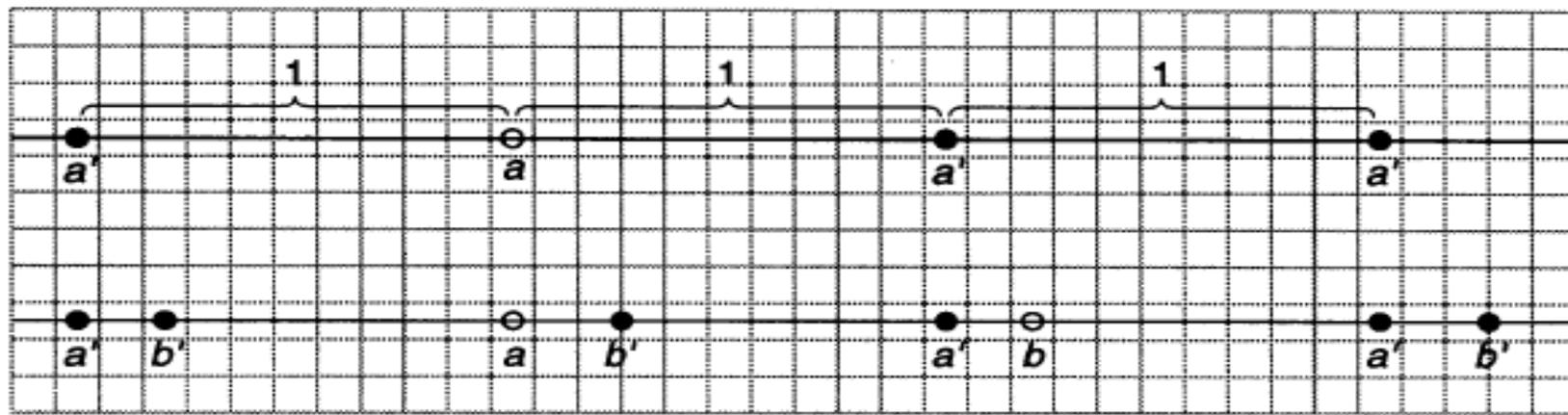


Figure 136

The proof generalizes in an obvious way to all disks smaller than 1 in diameter. If the denominator of the diameter is an integer, subtract 1 to get the maximum number of disks that can be positioned. If the denominator is not an integer, round it down to the nearest integer. Thus no disk of diameter 1 can be used. Only one disk of diameter $1/2$ or diameter $1/\sqrt{2}$ can be put on the line, only two disks of diameter $1/3$, only three of diameter $1/4$ or diameter $1/\pi$, only four of diameter $1/4.5$, and so on.

Although the problem cannot be solved by a straight line, it can be solved by a parabola.

Answers

The first problem asked for the use of a parabola to provide a quick proof of the number of solutions for the pair of equations: $x^2 + y = 7$ and $x + y^2 = 11$. The equations graph as two crossed parabolas, as shown in Figure 137. Since the parabolas intersect at just four points, there are just four solutions. Only one ($x = 2, y = 3$) is in integers. Even if your graphing is imprecise, you can prove that the other three solutions are not in whole numbers by testing the numbers indicated by the lattice crossings nearest the intersections. The actual numbers, all of them irrational, have the approximate values given in the illustration.

The second problem, from Ronald L. Graham, asked how an infi-

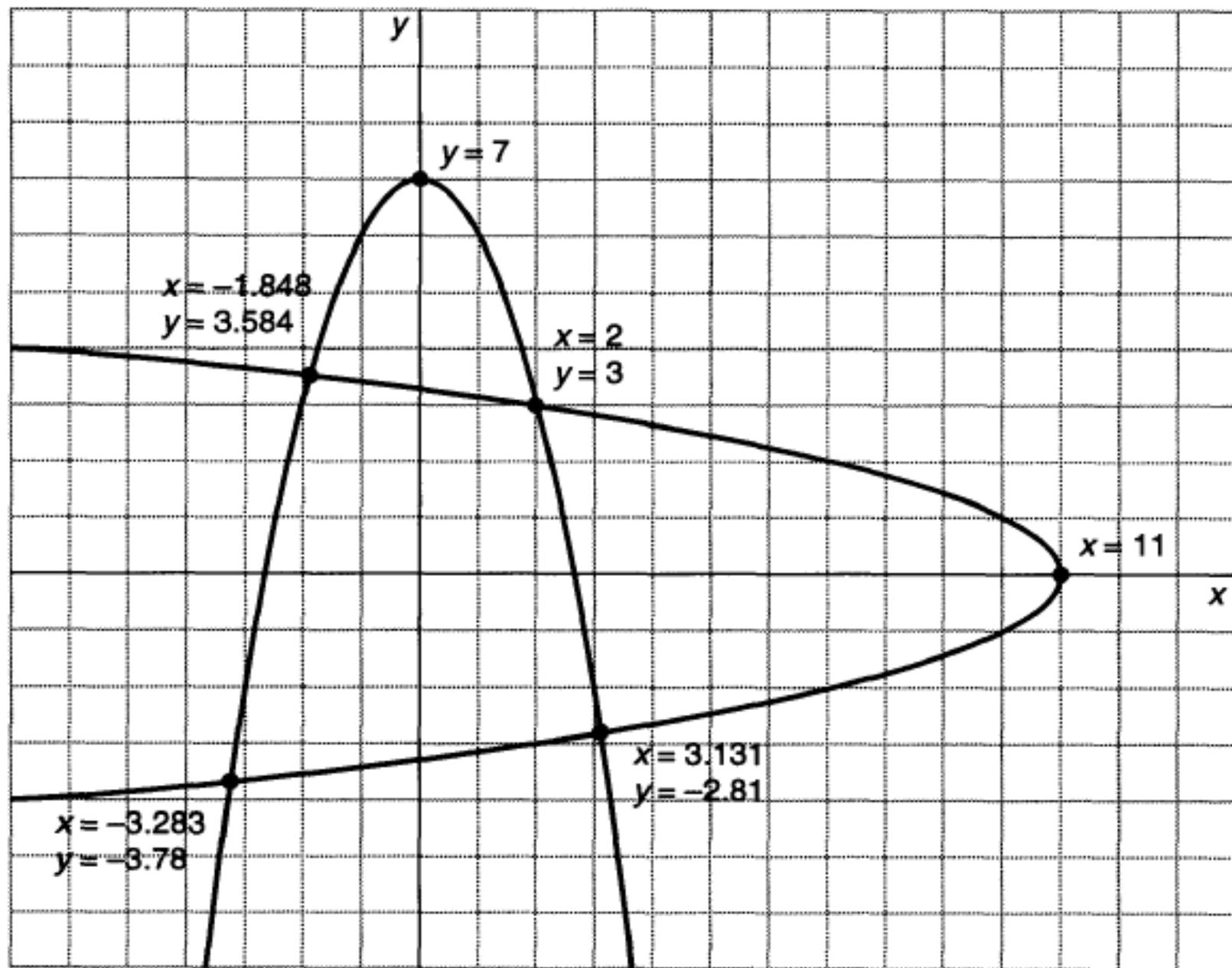


Figure 137

nite number of identical disks with diameters of less than 1, say $1/10$, could be placed in the plane so that no two points in the disks are an integral distance apart. One solution is to place them with their centers on a parabola of the form $y = x^2$, with their centers at points $(1,1)$, $(3,9)$, $(9,81)$, . . . , $(3^k, 3^{2k})$, I lack space for Graham's unpublished proof, so I reluctantly leave it as an exercise for interested readers.

ADDENDUM

In Thomas Pynchon's well-known novel *Gravity's Rainbow*, the rainbow is the parabolic trajectory of a rocket, a symbol of the rise and fall of cultures. Pynchon strengthens the metaphor by other references to parabolas, such as the parabolic arches that led to Berlin's slums, and Germany's failed effort to construct a parabolic sound-mirror.

References

- A BOOK OF CURVES. E. H. Lockwood. Cambridge University Press, 1961.
- THE PARABOLA. Harold R. Jacobs in *Mathematics, a Human Endeavor: A Textbook for Those Who Think They Don't Like the Subject*. W. H. Freeman and Company, 1970.
- DETERMINING THE AREA OF A PARABOLA. Jerry A. McIntosh in *Mathematics Teacher*, pages 88–91; January 1973.
- SOME METHODS FOR CONSTRUCTING THE PARABOLA. Joseph E. Ciotti in *Mathematics Teacher*, Vol. 67, pages 428–430; May 1974.
- GALILEO'S DISCOVERY OF THE PARABOLIC TRAJECTORY. Stillman Drake and James MacLachlan in *Scientific American*, Vol. 232, No. 3, pages 102–110; March 1975.
- DO SIMILAR FIGURES ALWAYS HAVE THE SAME SHAPE? Paul G. Kumpel, Jr., in *Mathematics Teacher*, Vol. 68, No. 8, pages 626–628; December 1975.
- CONSTRUCTING THE PARABOLA WITHOUT CALCULUS. Maxim Bruckheimer and Rina Hershkowitz in *Mathematics Teacher*, pages 658–662; November 1977.

Paradossi

IL PARADOSSO DELL'IMPICCAGIONE IMPREVEDIBILE

«Un nuovo e potente paradosso è venuto alla luce». Questa è la frase iniziale di uno sconcertante articolo di Michael Scriven, apparso nel numero di luglio 1951 sulla rivista inglese di filosofia *Mind*. Scriven, che ha il titolo di «professore di logica della scienza» all'Università dell'Indiana, è una persona la cui opinione in materia è piuttosto autorevole. Che il paradosso sia realmente potente è stato ampiamente confermato dal fatto che su di esso, in periodici specializzati, sono apparsi più di venti articoli. Gli autori, molti dei quali sono eminenti filosofi, sono in forte disaccordo nei loro tentativi di risolvere il paradosso. Non essendo stato raggiunto un accordo, il paradosso è ancora un argomento molto controverso.

Nessuno sa chi lo abbia ideato per primo. Secondo il logico W. V. Quine, dell'Università di Harvard, autore di uno degli articoli (e che ha discusso i paradossi nel numero di *Scientific American* dell'aprile del 1962), il paradosso fu messo in giro verbalmente agli inizi degli anni Quaranta ed è stato spesso presentato sotto forma di un indovinello riguardante un uomo condannato alla impiccagione.

Un tale venne condannato a morte di sabato. « L'impiccagione avverrà a mezzogiorno » disse il giudice al prigioniero « in uno dei sette giorni della prossima settimana. Ma voi non saprete in anticipo quale sarà il giorno perché sarete informato solo nella stessa mattinata del giorno fissato per l'esecuzione ».

Il giudice era noto per essere un uomo rigorosamente fedele alla sua parola. Il prigioniero, accompagnato dal suo avvocato, tornò in cella. Appena soli, il legale si mise a sorridere. « Non capite? » esclamò « La sentenza del giudice non ha possibilità di essere eseguita ».

« Non vedo come » disse il prigioniero.

« Ve lo spiego subito. È evidente che non possono impiccarvi sabato prossimo. Sabato è l'ultimo giorno della settimana e se foste vivo nel pomeriggio di venerdì, sapreste con assoluta certezza che l'impiccagione avverrebbe di sabato e lo verreste a sapere *prima* che l'annuncio vi venisse dato nella mattina di sabato. Ciò violerebbe la sentenza del giudice ».

« È vero » disse il prigioniero.

« Dunque sabato è decisamente escluso » continuò l'avvocato.
« Venerdì perciò resta l'ultimo giorno possibile per l'impiccagione. Però non è possibile che vi impicchino di venerdì perché, arrivati a giovedì pomeriggio rimarrebbero solo due giorni: venerdì e sabato. Ma se sabato non è un giorno possibile, l'impiccagione dovrebbe avvenire di venerdì. La vostra conoscenza di questo fatto violerebbe di nuovo la sentenza del giudice. Così l'ultimo giorno possibile rimane giovedì. Ma giovedì è da escludere perché se foste vivo mercoledì pomeriggio, sapreste che giovedì sarebbe il giorno fissato ».

« Vedo », disse il prigioniero, che cominciava a sentirsi molto più tranquillo. « Esattamente allo stesso modo posso escludere mercoledì, martedì e lunedì. Rimarrebbe solo domani; ma non possono impiccarmi domani perché lo saprei già da oggi! ».

In breve, la sentenza del giudice appare contraddittoria. Non vi è nulla di contraddittorio nei due enunciati che costituiscono la sentenza; tuttavia essa non può essere praticamente eseguita. In questa forma si presentò il paradosso a Donald John O'Connor, un filosofo dell'Università di Exeter, che per primo ne pubblicò una discussione (*Mind*, luglio 1948).

Ma il giovedì mattina, con sua grande sorpresa, il boia arriva. È chiaro che egli non se lo aspettava e, cosa ancor più sorprendente, la sentenza del giudice appare ora perfettamente corretta e può essere eseguita nei termini esatti enunciati. «Penso che questo gusto logico confutato dal mondo reale rende alquanto affascinante il paradosso», ha scritto Scriven. «Il logico compie con commovente cura i gesti che prima hanno sempre creato l'incantesimo, ma in un modo o nell'altro il mostro, la Realtà, non se ne rende conto e continua ad avanzare».

Per afferrare più chiaramente le reali e profonde difficoltà linguistiche che vi intervengono, sarà bene rinunciare il paradosso in due altre forme equivalenti. In questo modo è possibile eliminare vari fattori irrilevanti che spesso si presentano ad annebbiare la chiarezza dell'argomentazione, quali la possibilità che il giudice cambi opinione, che il prigioniero muoia prima che l'esecuzione abbia luogo, e così via.

La prima variante, presa dall'articolo di Scriven, può esser denominata « il paradosso dell'uovo imprevisto ».

Immaginate di aver davanti dieci scatole numerate da 1 a 10. Mentre voltate le spalle, un amico nasconde un uovo in una delle scatole. Vi voltate ed egli vi chiede « Apri queste scatole una per volta, secondo la numerazione. Ti assicuro che, nell'interno di una di esse, troverai un uovo del tutto imprevisto. Per "imprevisto" intendo dire che non ti sarà stato possibile in alcun modo dedurre in quale scatola esso si trovi, prima di poterla aprire e vederlo ».

Ammettendo che il vostro amico sia assolutamente degno di fiducia in ogni sua affermazione, può la sua previsione avverarsi? Evidentemente no. È ovvio che non metterà l'uovo nella scatola 10, perché dopo che avrete trovato vuote le prime nove scatole potrete dedurre con certezza che l'uovo è nell'unica scatola rimasta.

Ciò contraddirebbe l'affermazione del vostro amico. La scatola 10 va esclusa. Ora considerate la situazione che ne deriverebbe se fosse così ingenuo da porre l'uovo nella scatola numero 9. Voi trovereste le prime otto scatole vuote e resterebbero la 9 e la 10. Ma l'uovo non può essere nella 10; perciò deve essere nella 9. Aprite la 9 e ce lo trovate. È chiaro che si tratta di un uovo *previsto*, sicché si dimostra nuovamente che il vostro amico aveva torto. Anche la scatola 9 va esclusa. A questo punto cominciate a scivolare inesorabilmente nell'irrealtà. La scatola 8 può essere esclusa esattamente con la stessa argomentazione logica e analogamente lo sono la 7, 6, 5, 4, 3, 2, e la 1. Fiduciosi del fatto che tutte le

scatole sono vuote, cominciate ad aprirle e cosa c'è nella scatola 5? Un uovo assolutamente inatteso! La previsione del vostro amico alla fine si è avverata. Dov'è l'errore del vostro ragionamento?

inattesa ».

Immaginate di sedere ad un tavolo da gioco di fronte ad un amico che tiene in mano le tredici carte di picche. Ve le fa vedere poi le mescola e dopo averle aperte a ventaglio tenendole con la faccia verso di sé, ne posa una, coperta, sul tavolo. Poi vi chiede di chiamare lentamente le tredici carte, cominciando dall'asso e terminando al re. Ogni volta che il numero detto non corrisponde alla carta egli dirà « No ». Quando la carta chiamata è giusta vi dirà « Sì ».

« Scommetto mille lire contro dieci », dice, « che non sarai capace di dedurre il numero della carta prima che io dica " Sì " ».

capace di dedurre il numero...

Ammettendo che il vostro amico faccia del suo meglio per non perdere il suo denaro, è possibile che egli metta sul tavolo il re di picche? Ovviamente no; dopo aver nominato le prime dodici carte di picche, resterebbe solo il re. Perciò potreste dedurre con assoluta sicurezza l'identità della carta. Potrebbe essere la regina? Nemmeno, perché dopo aver nominato il fante resterebbero solo la regina ed il re. Non è possibile che sia il re, perciò dovrebbe essere la regina. Di nuovo la vostra deduzione sarebbe corretta e vincereste le mille lire. Lo stesso ragionamento fa eliminare tutte le rimanenti carte. Qualunque fosse la carta sareste capace di dedurre il valore in anticipo. Il processo logico sembra ineccepibile. Tuttavia appare egualmente ovvio che mentre guardate il dorso della carta non avete la minima idea di quale sia il suo valore!

carta non ave...

Anche semplificando il paradosso col ridurre a due i giorni o le scatole o le carte, qualcosa del tutto particolare continua a disturbare la situazione. Supponete che il vostro amico abbia solo l'asso e il due di picche. È vero che potreste guadagnare la posta se la carta fosse il due. Una volta chiamato ed escluso l'asso potreste dire « Ne deduco che il due è a terra ». Questa deduzione si basa naturalmente sulla verità dell'enunciato « La carta davanti a me è o l'asso o il due di picche ». (Vale sempre l'ipotesi, in tutti e tre i paradossi, che l'uomo *sarà* sicuramente impiccato, che *c'è* un uovo in una scatola, che le carte *sono* le carte designate). Questa è la più rigorosa delle deduzioni che un uomo potrebbe mai fare su un fatto di natura, e vi consentirebbe di porre la massima pretesa alle 1000 lire.

Supponete, però, che il vostro amico posi l'asso di picche. Potreste dall'inizio dedurre che la carta è l'asso? Certamente egli non rischierebbe le 1000 lire mettendo giù il due. Perciò *dovrà* mettere l'asso. Voi asserite di esser convinto che è l'asso. L'amico risponde « Sì ». Potete con tutta legittimità pretendere di aver vinto la scommessa?

Il fatto curioso è che non lo potete, e qui tocchiamo il punto più profondo del mistero. La vostra precedente deduzione si basava solo sulla premessa che la carta fosse o un asso o un due. La carta non è un asso; perciò è un due. Ma ora la vostra deduzione si basa sulla stessa ipotesi di prima con l'aggiunta di un'altra, cioè

sull'ipotesi che il vostro amico dica la verità; o, per dirla in termini pragmatici, sull'ipotesi che egli faccia tutto il possibile per evitare di pagare le 1000 lire. Ma se è possibile che voi deduciate che la carta è l'asso, allora egli perde la scommessa con la stessa certezza che se avesse messo a terra il due. Dato che in questo modo egli perde comunque, non sussiste alcuna base razionale perché egli scelga una carta piuttosto che un'altra. Una volta stabilito questo, la vostra deduzione che la carta sia un asso assume un carattere estremamente debole. È vero che sareste saggio scommettendo che è l'asso, perché probabilmente lo è, ma per vincere la posta dovete fare qualcosa di più: dovete provare che avete dedotto il valore della carta con una logica ferrea. E questo non potete farlo.

L'inconsistenza del ragionamento si vede forse più chiaramente tornando al caso delle dieci scatole. Inizialmente si « deduce » che l'uovo è nella scatola 1, ma la 1 è vuota. Allora viene « dedotto »

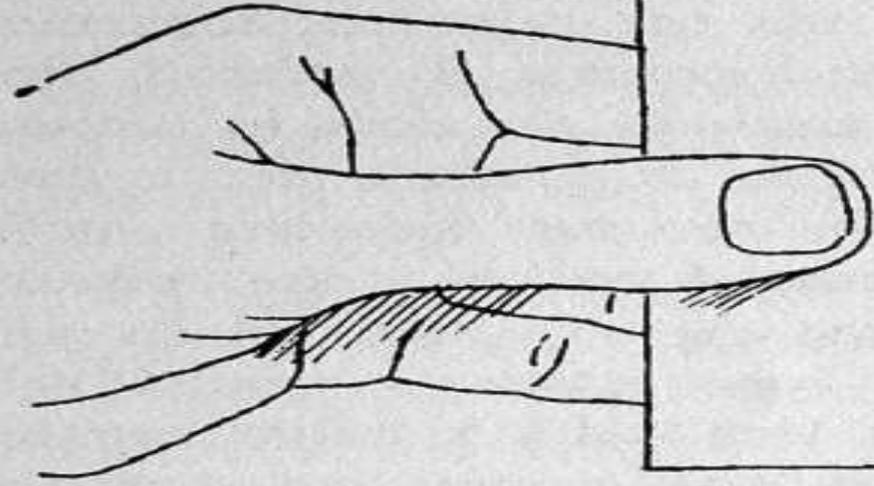
che è nella 2, ma anche la 2 risulta vuota. Dopodiché si può « dedurre » che è nelle 3 e così via. (È quasi come se l'uovo, appena prima che si possa guardare nella scatola in cui sicuramente dovrebbe essere, fosse abilmente trasportato attraverso una porticina segreta in una scatola con un numero più alto). Alla fine si trova l'uovo, secondo la « previsione », nella scatola 8. Si può sostenere che l'uovo è realmente « previsto » nel senso che la deduzione sud-

detta è senza pecche? Ovviamente non è possibile, perché le sette « deduzioni » che la precedevano si basavano esattamente sulla stessa linea di ragionamento, ed ognuna si è dimostrata falsa. Il fatto è semplicemente che l'uovo può essere in una qualsiasi scatola, *inclusa l'ultima*.

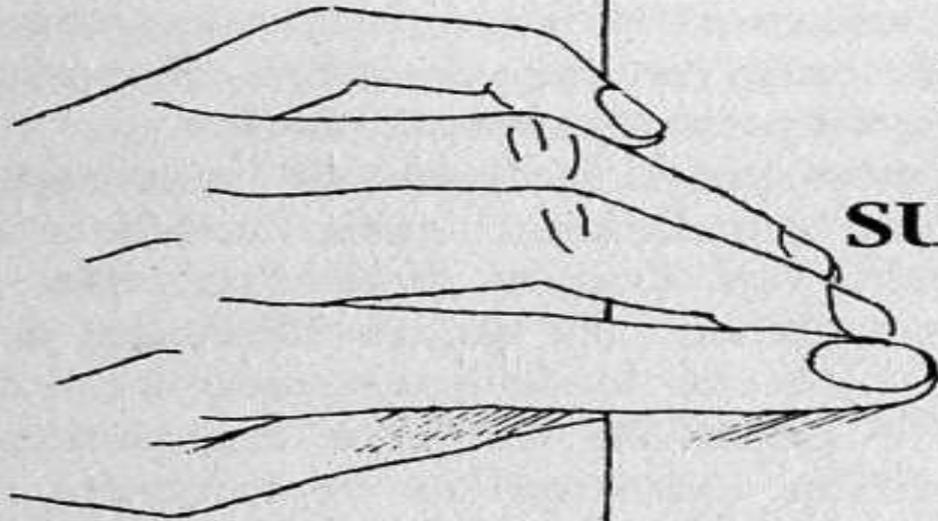
Anche dopo aver aperto nove scatole vuote, il problema se sia possibile « dedurre » che c'è un uovo nell'ultima non ha una risposta univoca. Se si ammette la sola premessa che una delle scatole deve contenere un uovo, allora si può dedurre naturalmente che nella scatola 10 c'è un uovo. In questo caso si tratta di un uovo previsto e l'asserzione che ciò non è possibile si dimostra falsa. Se si ammette inoltre che l'amico dice la verità quando afferma che l'uovo non è prevedibile, allora non si può fare alcuna deduzione, perché la prima premessa porta a prevedere un uovo nella scatola 10 e la seconda ad un uovo inaspettato. Dato che non si può dedurre alcunché, l'uovo nella scatola si presenta inaspettato ed entrambe le premesse vengono confermate, ma non prima che venga aperta l'ultima scatola ed effettivamente trovato l'uovo.

Possiamo riassumere questa soluzione del paradosso, nella forma dell'impiccagione, così. Il giudice dice la verità e il condannato ragiona erroneamente. Proprio il primo anello della catena del suo ragionamento — cioè, che non può essere impiccato l'ultimo giorno — è fallace. Anche la sera del penultimo giorno, come è stato spiegato nel precedente capoverso, riferendosi all'uovo nell'ultima scatola, non sussiste un fondamento per una deduzione. Questo è il punto principale dell'articolo di Quine del 1953. Secondo le parole conclusive di Quine, il condannato dovrebbe ragionare così: « Bisogna distinguere quattro casi: primo, che sarò impiccato domani a mezzogiorno ed io lo so sin da ora (ma non lo so); secondo, che non sarò impiccato domani a mezzogiorno e lo so sin da ora (ma non lo so) ; terzo, non sarò impiccato domani a mezzogiorno e ora non lo so; quarto, sarò impiccato domani a mezzogiorno ed ora non lo so. Le ultime due alternative sono le uniche due possibili e l'ultima rispetta la sentenza. Piuttosto che incolpare il giudice di contraddirsi, perciò, mi astengo dal fare asserzioni e spero per il meglio ».

Il matematico scozzese Thomas H. O' Beirne, in un articolo dal titolo alquanto paradossale « È possibile che un fatto inaspettato *non* si verifichi mai? » (*The New Scientist* del 25 maggio 1961), ha fatto di questo paradosso un'analisi che mi sembra eccellente. Come O' Beirne chiarisce, la chiave per risolvere il paradosso consiste nel riconoscere che un'asserzione intorno a un evento futuro può risultare una predizione vera per una persona ma non essere ricono-



**L'ASSERZIONE
SCRITTA
SULL'ALTRO LATO
DI QUESTO
BIGLIETTO
È VERA**



**L'ASSERZIONE
SCRITTA
SULL'ALTRO LATO
DI QUESTO
BIGLIETTO
È FALSA**

Fig. 1. Il paradosso del biglietto da visita di Jourdain.

sciuta come vera da un'altra sino a dopo la realizzazione dell'evento. È facile pensare dei semplici esempi. Uno vi dà una scatola e dice: «Aprila e vi troverai dentro un uovo». Egli sa che la sua predizione è vera, ma voi non potete saperlo sinché non aprite la scatola.

Lo stesso avviene per il paradosso. Il giudice, la persona che mette l'uovo nella scatola, l'amico che tiene le tredici carte di picche — ognuno di questi sa che la sua predizione è esatta. Ma l'enunciato della predizione non può essere usato per sostenere una catena di argomentazioni che alla fine dimostrino falsa la predizione stessa. È questo autoriferimento circolare, come l'asserzione sulla faccia del biglietto di Jourdain, a mettere il bastone tra le ruote di tutti i tentativi di dimostrare errata la predizione.

È possibile ridurre il paradosso all'essenziale seguendo una traccia data da Scriven. Supponiamo che un tale dica a sua moglie: «Mia cara, domani per il tuo compleanno ti farò una sorpresa con un regalo assolutamente inatteso. Non hai alcuna possibilità di immaginare cosa sia. È quel braccialetto d'oro che hai visto la settimana scorsa nella vetrina di "Tiffany"».

Cosa può fare in questo caso la povera moglie? Lei sa che il marito dice la verità e mantiene le sue promesse. Ma se le dà il braccialetto d'oro non sarà più una sorpresa e la predizione risulterebbe falsa. E se la predizione è falsa, cosa se ne può dedurre? Può darsi che mantenga la parola per quanto riguarda la promessa del braccialetto e allora mancherà a quella di fare un regalo inatteso. D'altro lato può mantenere la parola circa la sorpresa ma venir meno a quella del braccialetto e regalarle, per esempio, una lavatrice nuova. Dato il carattere contraddittorio dell'affermazione del marito, essa non ha alcuna base razionale per scegliere fra queste alternative; perciò non ha alcuna base razionale per aspettare il braccialetto d'oro. È facile immaginare cosa avviene. Per il suo compleanno essa rimane sorpresa nel ricevere un braccialetto a fil di logica inatteso.

Lui ha sempre saputo che avrebbe mantenuto la parola. Lei non poteva saperlo sino a dopo l'evento. Un enunciato che sino a ieri sembrava sciocco, che la faceva piombare in un vortice senza fine di contraddizioni logiche, è reso oggi improvvisamente del tutto vero e non contraddittorio dall'apparizione del braccialetto d'oro. Questa è, nella forma più rigorosa possibile, la strana magia verbale che dà a tutti i paradossi discussi qui la loro stupefacente grazia di rompicapo.

Appendice

Molte lettere acute e talvolta stupefacenti sono giunte da lettori che offrivano il loro parere su come andava risolto il paradosso dell'impiccagione imprevedibile. Molti hanno continuato ampliando le loro idee in articoli elencati nella bibliografia di questo capitolo. (Di solito dò solo alcune indicazioni scelte per ogni capitolo, ma in questo caso mi è sembrato che molti lettori avrebbero gradito un elenco il più completo possibile).

Lennart Ekbom, che insegna matematica all'Oestermalms College, a Stoccolma, ha stabilito la possibile origine del paradosso. Nel 1943 e '44 — scriveva — l'ente radiofonico svedese annunciò che sarebbe stata effettuata un'esercitazione di difesa civile nella settimana successiva e che per provare l'efficienza delle unità della difesa civile, nessuno sarebbe stato in grado di predire, neppure la mattina stessa del giorno dell'esercitazione, quando sarebbe avvenuta. Ekbom capì che ciò comportava un paradosso logico, che discusse con alcuni studenti di matematica e filosofia all'Università di Stoccolma. Nel 1947 uno di questi studenti visitò Princeton, dove sentì citare da Kurt Gödel, famoso matematico, una variante del paradosso. Ekbom aggiunge di aver inizialmente ritenuto il paradosso anteriore all'avviso di difesa civile svedese, ma, considerando che Quine afferma di aver sentito parlare del paradosso all'inizio degli anni Quaranta, forse la sua origine è proprio questa.

Le seguenti due lettere non cercano di spiegare il paradosso, ma ne presentano degli aspetti collaterali divertenti (e imbarazzanti). Entrambe sono state pubblicate nella rubrica delle lettere dei lettori nello *Scientific American* del maggio 1963.

Signori,

Nell'articolo di Martin Gardner sul paradosso dell'uovo imprevisto l'autore sembra dimostrare logicamente l'impossibilità della presenza dell'uovo in una qualsiasi delle scatole, per poi meravigliarsi che l'uovo compaia nella scatola n. 5. A prima vista ciò è veramente stupefacente, ma con una analisi approfondita si dimostra che l'uovo sarà sempre nella scatola 5.

Questa è la dimostrazione:

Sia S l'insieme di tutti gli enunciati.

Sia T l'insieme di tutti gli enunciati veri.

Ogni elemento di S (un qualsiasi enunciato) appartiene o all'insieme T o all'insieme $C = S - T$, che è il complemento di T, ma non ad entrambi

Consideriamo:

- 1) Ogni enunciato all'interno di questo rettangolo è un elemento di C.
 2) L'uovo è sempre nella scatola 5.

L'enunciato (1) è o in T o in C ma non in entrambi.

Se (1) appartiene a T, allora è vero. Ma se (1) è vero, esso afferma correttamente che ogni enunciato nel rettangolo, compreso (1), è in C. Perciò l'ipotesi che (1) sia in T implica che (1) sia in C.

E QUESTA È UNA CONTRADDIZIONE

Se (1) è in C, dobbiamo considerare due casi: che l'enunciato (2) sia in C o che sia in T.

Se (2) è in C, allora sia (1) che (2), cioè ogni enunciato nel rettangolo, è un elemento di C. Questo è esattamente quanto asserisce (1), e di conseguenza (1) è vero ed è in T. Perciò l'ipotesi che entrambi (1) e (2) siano in C implica che (1) è in T.

E QUESTA È UNA CONTRADDIZIONE

Se (2) è in T [e (1) è in C], allora l'asserto di (1) che ogni enunciato nel rettangolo sia in C è falsificato dal fatto che (2) è in T. Perciò (1) è non vero ed è in C, il che concorda completamente.

Il solo caso coerente è dunque quello per cui l'enunciato (1) è in C e l'enunciato (2) è in T. L'enunciato (2) deve essere vero. Perciò l'uovo si troverà sempre nella scatola 5. È chiaro che la scoperta dell'uovo nella scatola 5 non è poi tanto sorprendente, in fin dei conti.

GEORGE VARIAN - DAVID S. BIRKES

Signori,

Ho letto con estremo interesse il paradosso di Martin Gardner sull'uomo condannato all'impiccagione. Non ho potuto fare a meno di notare che se il nostro prigioniero avesse avuto fiducia nella statistica, avrebbe preferito essere impiccato di venerdì, il quarto giorno. In quanto se il giudice avesse preso a caso uno dei sette giorni, la probabilità di dover attendere x giorni per ricevere esattamente una impiccagione sarebbe stata per il prigioniero $p(x) = 1/7$. Ossia qualsiasi numero di giorni di attesa, fra uno

e sette, è ugualmente probabile. Questa osservazione è un caso semplice della più generale distribuzione ipergeometrica dei tempi d'attesa

$$p(x) = \frac{\frac{(x-1)!}{(x-k)! (k-1)!} \frac{(N-x)!}{(N-x-b+k)! (b-k)!}}{N!} \frac{1}{(N-b)! (b!)}$$

in cui $p(x)$ è la probabilità che x prove indipendenti debbano essere effettuate per ottenere k successi, quando vi sono b eventi favorevoli disposti a caso fra N . Nel nostro caso abbiamo $N = 7$ e (ammettendo che una impiccagione sia più che sufficiente) $b = k = 1$. Perciò la « speranza matematica » o valor medio di x è $(1 + 2 + \dots + 7)/7 = 4$ giorni. Però penso che dobbiamo sempre tener conto di quella persona particolarmente tenace che vorrà eliminare il venerdì per il motivo che esso è « previsto ».

MILTON R. SEILER

NONTRANSITIVE DICE

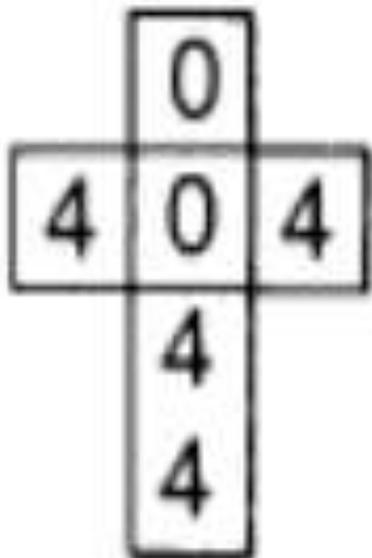
AND OTHER PROBABILITY PARADOXES

Probability theory abounds in paradoxes that wrench common sense and trap the unwary. In this chapter we consider a startling new paradox involving the relation called transitivity and a group of paradoxes stemming from the careless application of what is called the principle of indifference.

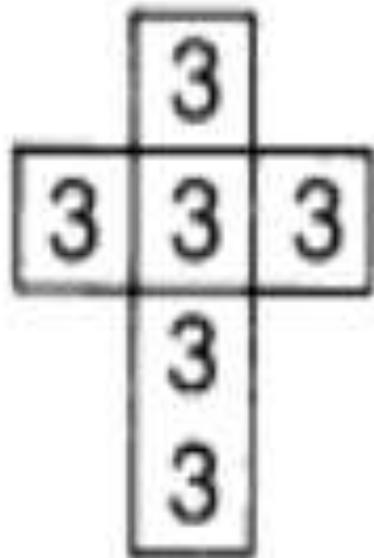
Transitivity is a binary relation such that if it holds between A and B and between B and C , it must also hold between A and C . A common example is the relation “heavier than.” If A is heavier than B and B is heavier than C , then A is heavier than C . The three sets of four dice shown “unfolded” in Figure 21 were designed by Bradley Efron, a statistician at Stanford University, to dramatize some recent discoveries about a general class of probability paradoxes that violate transitivity. With any of these sets of dice you can operate a betting game so contrary to intuition that experienced gamblers will find it almost impossible to comprehend even after they have completely analyzed it.

The four dice at the top of the illustration are numbered in the simplest way that provides the winner with the maximum advantage. Allow someone to pick any die from this set. You then select a die from the remaining three. Both dice are tossed and the person who gets the highest number wins. Surely, it seems, if your opponent is allowed the first choice of a die before each contest, the game must either be fair or favor your opponent. If at least two dice have equal and maximum probabilities of winning, the game is fair because if he picks one such die, you can pick the other; if one die is better than the other three, your opponent can always choose that die and win more than half of the contests. This reasoning is com-

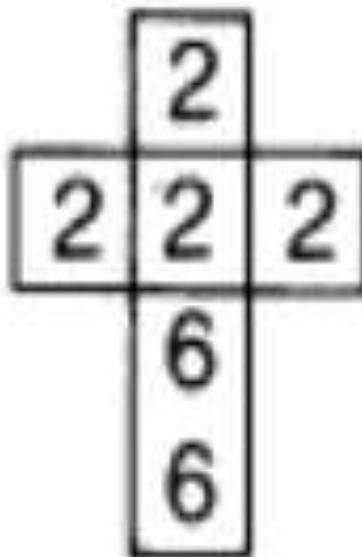
A



B



C



D

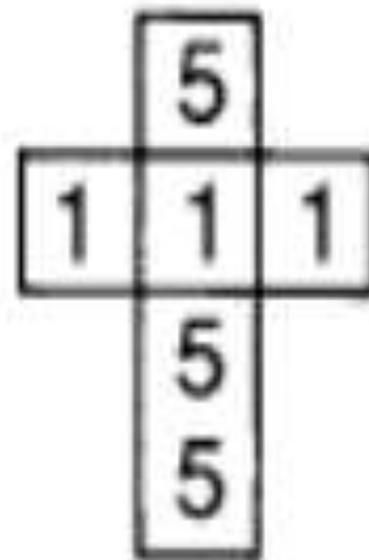
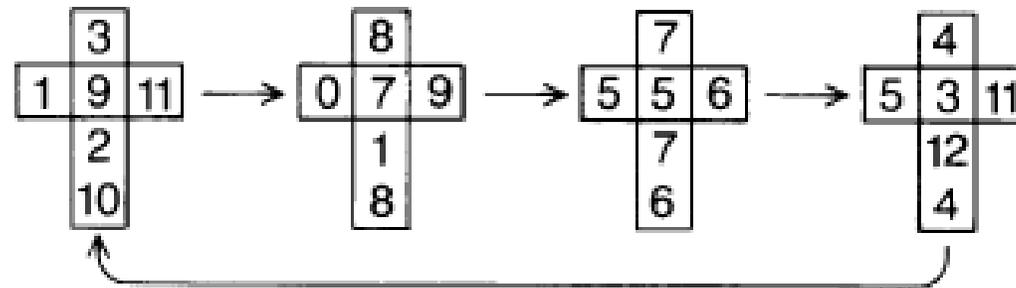
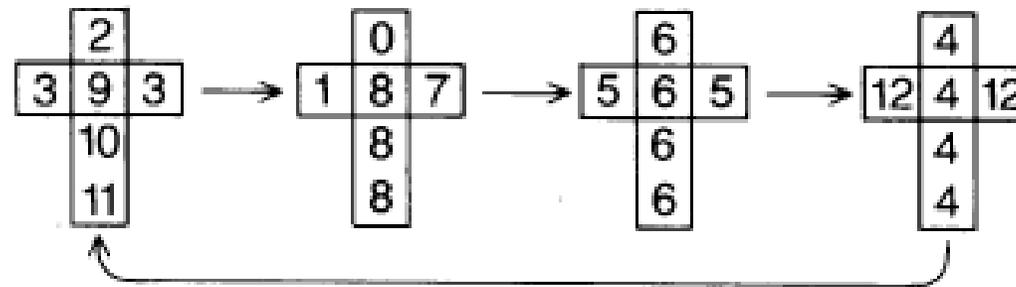
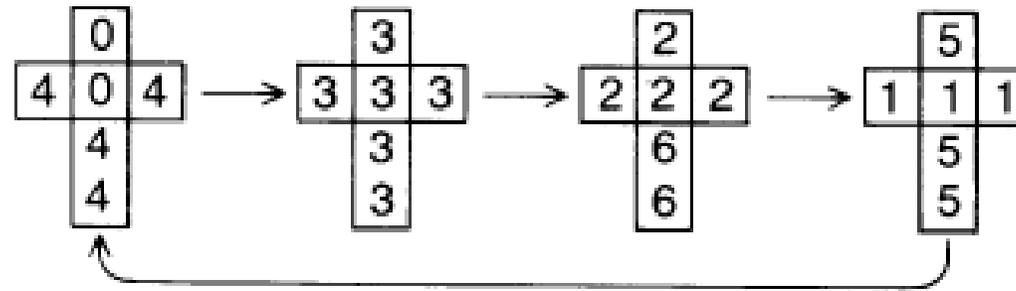


Figure 21



Nontransitive dice



pletely wrong. The incredible truth is that regardless of which die he picks you can always pick a die that has a $\frac{2}{3}$ probability of winning, or two-to-one odds in your favor!

The paradox (insofar as it violates common sense) arises from the mistaken assumption that the relation “more likely to win” must be transitive between pairs of dice. This is not the case with any of the three sets of dice. In each set the relation “more likely to win” is indicated by an arrow that points to the losing die. Die *A* beats *B*, *B* beats *C*, *C* beats *D*—and *D* beats *A*! In the first set the probability of winning with the indicated die of each pair is $2/3$. This is easily verified by listing the 36 possible throws of each pair, then checking the 24 cases in which one die bears the highest number.

The other two sets of four dice, also designed by Efron, have the same nontransitive property but fewer numbers are repeated in order to make an analysis of the dice more difficult. In the second set the probability of winning with the indicated die is also $2/3$. Because ties are possible with the third set it must be agreed that ties will be broken by rolling again. With this procedure the winning probability for each of the four pairings in the third set is $11/17$, or $.647$.

It has been proved, Efron writes, that $2/3$ is the greatest possible advantage that can be achieved with four dice. For three sets of numbers the maximum advantage is $.618$, but this cannot be obtained with dice because the sets must have more than six numbers. If more than four sets are used (numbers to be

randomly selected within each set), the possible advantage approaches a limit of $3/4$ as the number of sets increases.

A fundamental principle in calculating probabilities such as dice throws is one that goes back to the beginnings of classical probability theory in the 18th century. It was formerly called “the principle of insufficient reason” but is now known as “the principle of indifference,” a crisper phrase coined by John Maynard Keynes in *A Treatise on Probability*. (Keynes is best known as an economist, but his book on probability has become a classic. It had a major influence on the inductive logic of Rudolf Carnap.) The principle is usually stated as follows: If you have no grounds whatever for believing that any one of n mutually exclusive events is more likely to occur than any other, a probability of $1/n$ is assigned to each.

randomly selected within each set), the possible advantage approaches a limit of $3/4$ as the number of sets increases.

A fundamental principle in calculating probabilities such as dice throws is one that goes back to the beginnings of classical probability theory in the 18th century. It was formerly called “the principle of insufficient reason” but is now known as “the principle of indifference,” a crisper phrase coined by John Maynard Keynes in *A Treatise on Probability*. (Keynes is best known as an economist, but his book on probability has become a classic. It had a major influence on the inductive logic of Rudolf Carnap.) The principle is usually stated as follows: If you have no grounds whatever for believing that any one of n mutually exclusive events is more likely to occur than any other, a probability of $1/n$ is assigned to each.

For example, you examine a die carefully and find nothing that favors one side over another, such as concealed loads, noncubical shape, beveling of certain edges, stickiness of certain sides and so on. You assume that there are six equally probable ways the cube can fall; therefore you assign a probability of $1/6$ to each. If you toss a penny, or play the Mexican game of betting on which of two sugar cubes a fly will alight on first, your ignorance of any possible bias prompts you to assign a probability of $1/2$ to each of the two outcomes. In none of these samples do you feel obligated to make statistical, empirical tests. The probabilities are assigned a priori. They are based on symmetrical features in the structures and forces involved. The die is a regular solid, the probability of the penny's balancing on its edge is virtually zero, there is no reason for a fly to prefer one sugar cube to another and so on. Ultimately, of course, your analysis rests on empirical grounds, since only experience tells you, say, that a weighted die face would affect the odds, whereas a face colored red (with the others blue) would not.

Some form of the principle of indifference is indispensable in probability theory, but it must be carefully qualified and applied with extreme caution to avoid pitfalls. In many cases the traps spring from a difficulty in deciding on what are the equally probable cases. Suppose, for instance, you shuffle a packet of four cards—two red, two black—and deal them face down in a row. Two cards are picked at random, say by placing a penny on each. What is the probability that those two cards are the same color?

One person reasons: “There are three equally probable cases. Either both cards are black, both are red or they are dif-

ferent colors. In two cases the cards match, therefore the matching probability is $2/3$.”

“No,” another person counters, “there are *four* equally probable cases. Either both cards are black, both are red, card x is black and y is red or x is red and y is black. More simply, the cards either match or they do not. In each way of putting it the matching probability clearly is $1/2$.”

The fact is that both people are wrong. (The correct probability will be given in the Answer Section. Can the reader calculate it?) Here the errors arise from a failure to identify correctly the equally probable cases. There are, however, more confusing paradoxes—actually fallacies—in which the principle of indifference seems intuitively to be applicable, whereas it actually leads straight to a logical contradiction. Cases such as these result when there are no positive reasons for believing n events to be equally probable and the assumption of equiprobability is therefore based entirely, or almost entirely, on ignorance.

For example, someone tells you: “There is a cube in the next room whose size has been selected by a randomizing device. The cube’s edge is not less than one foot or more than three feet.” How would you estimate the probability that the cube’s edge is between one and two feet as compared with the probability that it is between two and three feet? In your total ignorance of additional information, is it not reasonable to invoke the principle of indifference and regard each probability as $1/2$?

It is not. If the cube's edge ranges between one and two feet, its volume ranges between 1^3 , or one, cubic foot and 2^3 , or eight, cubic feet. But in the range of edges from two to three feet, the volume ranges between 2^3 (eight) and 3^3 (27) cubic feet—a range almost three times the other range. If the principle of indifference applies to the two ranges of edges, it is violated by the equivalent ranges of volume. You were not told how the cube's "size" was randomized, and since "size" is ambiguous (it could mean either the cube's edge or its volume) you have no clues to guide your guessing. If the cube's edge was picked at random, the principle of indifference does indeed apply. It is also applicable if you are told that the cube's volume was picked at random, but of course you then have to assign a probability of $1/2$ to each of the two ranges from one to 14 and from 14 to 27 cubic feet, and to the corresponding ranges for the cube's edge. If the principle applies to the edge, it cannot apply to the volume without contradiction, and vice

versa. Since you do not know how the size was selected, any application of the principle is meaningless.

Carnap, in attacking an uncritical use of the principle in Harold Jeffreys' *Theory of Probability*, gives the following example of its misuse. You know that every ball in an urn is blue, red or yellow, but you know nothing about how many balls of each color are in the urn. What is the probability that the first ball taken from the urn will be blue? Applying the principle of indifference, you say it is $1/2$. The probability that it is not blue must also be $1/2$. If it is not blue, it must be red or yellow, and because you know nothing about the number of red or yellow balls, those colors are equally probable. Therefore you assign to red a probability of $1/4$. On the other hand, if you begin by asking for the probability that the first ball will be red, you must give red a probability of $1/2$ and blue a probability of $1/4$, which contradicts your previous estimates.

It is easy to prove along similar lines that there is life on Mars. What is the probability that there is simple plant life on Mars? Since arguments on both sides are about equally cogent, we answer $1/2$. What is the probability that there is simple animal life on Mars? Again, $1/2$. Now we are forced to assert that the probability of there being "either plant or animal life" on Mars is $1/2 + 1/2 = 1$, or certainty, which is absurd. The philosopher Charles Sanders Peirce gave a similar argument that seems to show that the hair of inhabitants on Saturn had to be either of two different colors. Many variants of this fallacy can be found in Chapter 4 of Keynes's book. It is easy to invent others.

In the history of metaphysics the most notorious misuse of the principle surely was by Blaise Pascal, who did pioneer work on probability theory, in a famous argument that became known as “Pascal’s wager.” A few passages from the original and somewhat lengthy argument (in Pascal’s *Pensées*, Thought 233) are worth quoting:

“God is, or he is not.” To which side shall we incline? Reason can determine nothing about it. There is an infinite gulf fixed between us. A game is playing at the extremity of this infinite distance in which heads or tails may turn up. What will you wager? There is no reason for backing either one or the other, you cannot reasonably argue in favor of either. . . .

Yes, but you must wager. . . . Which will you choose? . . . Let us weigh the gain and the loss in choosing “heads” that God is. . . . If you gain, you gain all. If you lose, you lose nothing. Wager, then, unhesitatingly that he is.

Lord Byron, in a letter, rephrased Pascal's argument effectively: "Indisputably, the firm believers in the Gospel have a great advantage over all others, for this simple reason—that, if true, they will have their reward hereafter; and if there be no hereafter, they can be but with the infidel in his eternal sleep, having had the assistance of an exalted hope through life, without subsequent disappointment, since (at the worst for them) out of nothing nothing can arise, not even sorrow." Similar passages can be found in many contemporary books of religious apologetics.

Pascal was not the first to insist in this fashion that faith in Christian orthodoxy was the best bet. The argument was clearly stated by the fourth-century African priest Arnobius the Elder, and non-Christian forms of it go back to Plato. This is not the place, however, to go into the curious history of defenses and criticisms of the wager. I content myself with mentioning Denis Diderot's observation that the wager applies with equal force to other major faiths such as Islam. The mathematically interesting aspect of all of this is that Pascal likens the outcome of his bet to the toss of a coin. In other words, he explicitly invokes the principle of indifference to a situation in which its application is mathematically senseless.

The most subtle modern reformulation of Pascal's wager is by William James, in his famous essay *The Will to Believe*, in which he argues that philosophical theism is a better gamble than atheism. In a still more watered-down form it is even used occasionally by humanists to defend optimism against pessimism at a time when the extinction of the human race seems as likely in the near future as its survival.

"While there is a chance of the world getting through its troubles," says the narrator of H. G. Wells's little read novel *Apropos of Dolores*, "I hold that a reasonable man has to behave as though he was sure of it. If at the end your cheerfulness is not justified, at any rate you will have been cheerful."

ANSWERS

The probability that two randomly selected cards, from a set of two red and two black cards, are the same color is $1/3$. If you list the 24 equally probable permutations of the four cards, then pick any two positions (for example second and fourth cards), you will find eight cases in which the two cards match in color. One way to see that this probability of $8/24$ or $1/3$ is correct is to consider one of the two chosen cards. Assume that it is red. Of the remaining three cards only one is red, and so

the probability that the second chosen card will be red is $1/3$. Of course, the same argument applies if the first card is black. Most people guess that the odds are even, when actually they are two to one in favor of the cards' having different colors.

ADDENDUM

The following letter, from S. D. Turner, contains some surprising information:

Your bit about the two black and two red cards reminds me of an exercise I did years ago, which might be called *N-Card Monte*. A few cards, half red, half black, or nearly so, are shown face up by the pitchman, then shuffled and dealt face down. The sucker is induced to bet he can pick two of the same color.

The odds will always be against him. But because the sucker will make erroneous calculations (like the $2/3$ and $1/2$ in your 2:2 example), or for other reasons, he will bet. The pitchman can make a plausible spiel to aid this: "Now, folks, you don't need to pick two blacks, and you don't need to pick two reds. If you draw either pair you win!"

The probability of getting two of the same color, where there are R reds and B blacks, is:

$$(1) P = \frac{R^2 + B^2 - (R + B)}{(R + B)(R + B - 1)}$$

This yields the figures in the table [see Figure 22], one in lowest-terms fractions, the other in decimal. Only below and to the left of the staircase line does the sucker get an even break or better. But no pitchman would bother with odds more favorable to the sucker than the $1/3$ probability for 2:2, or possibly the $2/5$ for 3:3.

Surprisingly, the two top diagonal lines are identical. That is, if you are using equal reds and blacks, odds are not changed if a card is removed before the two are selected! In your example of 2:2, the probability is $1/3$ and it is also $1/3$ when starting with 2:1 (as is evident because the one card not selected can be any one of the three). The generality of this can be shown thus: If $B=R$ and $B=R-1$ are substituted into (1), the result in each case is $R-1/2R-1$.

Some readers sent detailed explanations of why the arguments behind the fallacies that I described were wrong, apparently not realizing that these fallacies were intended to be howlers based on the misuse of the principle of indifference.

Figure 22

		Red Cards											
		1	2	3	4	5	6	7	8	...	13	26	
Black Cards	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$										
	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$									
	4	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$								
	5	$\frac{3}{3}$	$\frac{11}{21}$	$\frac{13}{28}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$							
	6	$\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{11}$						
	7	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{27}{35}$	$\frac{31}{66}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{13}$					
	8	$\frac{7}{9}$	$\frac{29}{45}$	$\frac{31}{55}$	$\frac{17}{33}$	$\frac{19}{39}$	$\frac{43}{91}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$				
	...												
	13										$\frac{12}{25}$		
	26												$\frac{25}{51}$
	2	.333	.333										
	3	.500	.400	.400									
	4	.600	.466	.429	.429								
5	.667	.524	.465	.444	.444								
6	.714	.572	.500	.467	.455	.455							
7	.750	.611	.533	.491	.470	.462	.462						
8	.778	.645	.564	.515	.488	.472	.466	.466					
...													
13										.480			
26												.490	

Probability of drawing two cards of the same color

Several readers correctly pointed out that although Pascal did invoke the principle of indifference by referring to a coin flip in his famous wager, the principle is not essential to his argument. Pascal posits an infinite gain for winning a bet in which the loss (granting his assumptions) would always be finite regardless of the odds.

Efron's nontransitive dice aroused almost as much interest among magicians as among mathematicians. It was quickly perceived that the basic idea generalized to k sets of n -sided dice, such as dice in the shapes of regular octahedrons, dodecahedrons, icosahedrons, or cylinders with n flat sides. The game also can be modeled by k sets of n -sided tops, spinners with n numbers on each dial, and packets of n playing cards.

Karl Fulves, in his magic magazine *The Pallbearers Review* (January 1971) proposed using playing cards to model Efron's dice. He suggested the following four packets: 2, 3, 4, 10, J, Q; 1, 2, 8, 9, 9, 10; 6, 6, 7, 7, 8, 8; and 4, 5, 5, 6, Q, K. Suits are irrelevant. First player selects a packet, shuffles it, and draws a card. Second player does the same with another packet. If the

chosen cards have the same value, they are replaced and two more cards drawn. Ace is low, and high card wins. This is based on Efron's third set of dice where the winning probability, if the second player chooses properly, is $11/17$. To avoid giving away the cyclic sequence of packets, each could be placed in a container (box, cup, tray, etc.) with the containers secretly marked. Before each play, the containers would be randomly mixed by the first player while the second player turned his back. Containers with numbered balls or counters could of course be substituted for cards.

In the same issue of *The Pallbearers Review* cited above, Columbia University physicist Shirley Quimby proposed a set of four dice with the following faces:

3, 4, 5, 20, 21, 22

1, 2, 16, 17, 18, 19

10, 11, 12, 13, 14, 15

6, 7, 8, 9, 23, 24

Note that numbers 1 through 24 are used just once each in this elegant arrangement. The dice give the second player a winning probability of $2/3$. If modeled with 24 numbered cards, the first player would select one of the four packets, shuffle, then draw a card. The second player would do likewise, and high card wins.

R. C. H. Cheng, writing from Bath University, England, proposed a novel variation using a single die. On each face are numbers 1 through 6, each numeral a different color. Assume that the colors are the rainbow colors red, orange, yellow, green, blue, and purple. The chart below shows how the numerals are colored on each face.

Face	Red	Orange	Yellow	Green	Blue	Purple
A	1	2	3	4	5	6
B	6	1	2	3	4	5
C	5	6	1	2	3	4
D	4	5	6	1	2	3
E	3	4	5	6	1	2
F	2	3	4	5	6	1

The game is played as follows: The first player selects a color, then the second player selects another color. The die is rolled and the person whose color has the highest value wins. It is easy to see from the chart that if the second player picks the adjacent color on the right—the sequence is cyclic, with red to the “right” of purple—the second player wins five out of six times. In other words, the odds are 5 to 1 in his favor!

To avoid giving away the sequence of colors, the second player should occasionally choose the second color to the right, where his winning odds are 4 to 2, or the color third to the right where the odds are even. Perhaps he should even, on rare occasions, take the fourth or fifth color to the right where odds against him are 4 to 2 and 5 to 1 respectively. Mel Stover has suggested putting the numbers and colors on a 6-sided log instead of a cube.

This, too, models nicely with 36 cards, formed in six piles, each bearing a colored numeral. The chart's pattern is obvious, and easily applied to n^2 cards, each with numbers 1 through n , and using n different colors. In presenting it as a betting game you should freely display the faces of each packet to show that all six numbers and all six colors are represented. Each packet is shuffled and placed face down. The first player is "generously" allowed first choice of a color, and to select any packet. The color with the highest value in that packet is the winner. In the general case, as Cheng pointed out in his 1971 letter, the second player can always choose a pile that gives him a probability of winning equal to $(n-1)/n$.

A simpler version of this game uses 16 playing cards. The four packets are:

AS, JH, QC, KD
KS, AH, JC, QD
QS, KH, AC, JD
JS, QH, KC, AD

Ace here is high, and the cyclic sequence of suits is spades, hearts, clubs, diamonds. The second player wins with 3 to 1 odds by choosing the next adjacent suit, and even odds if he goes to the next suit but one.

These betting games are all variants of nontransitive voting paradoxes, about which there is extensive literature.

BIBLIOGRAPHY

A Treatise on Probability. John Maynard Keynes. Macmillan, 1921. Harper & Row paperback reprint, 1962.

“Statistical and Inductive Probability.” Rudolf Carnap in *The Structure of Scientific Thought*, by Edward H. Madden, ed. Houghton Mifflin, 1960.

On Pascal’s Wager:

“Pascal’s Wager.” James Cargile. *Philosophy: The Journal of the Royal Institute of Philosophy*, Vol. 41, July 1966, pages 250–257.

“Deciding for God—the Bayesian Support of Pascal’s Wager.” Merle B. Turner in *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 29, September 1968, pages 84–90.

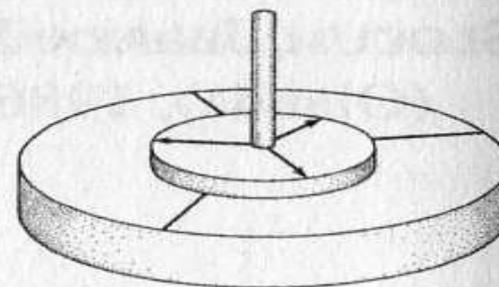
The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas About Probability, Induction, and Statistical Inference. Ian Hacking. Cambridge University Press, 1976.

On Nontransitive Betting Games:

“A Dice Paradox.” Gene Finnell. *Epilogue*, July 1971, pages 2–3. This is another magic magazine published by Karl Fulves.

“Nontransitive Dominance.” Richard Tenney and Caxton Foster. *Mathematics Magazine*, Vol. 49. May–June 1976, pages 115–120.

“Mathematical Games.” Martin Gardner. *Scientific American*, October 1974.



PARADOSSI INTRANSITIVI

“Ho abbastanza senno da capire... che essere io troppo buona con te, ed essere tu troppo buono con me, non può essere vero allo stesso tempo, in entrambi i sensi”.

ELISABETH BARRETT, in una lettera a Robert Browning

Si dice che una relazione R è transitiva se ogni volta che si verificano le premesse xRy e yRz si verifica anche che xRz . Per esempio, la relazione “minore di” è transitiva nell’insieme di tutti i numeri reali. Sapendo che 2 è minore di π e la radice quadrata di 3 è minore di 2, possiamo essere certi che la radice quadrata di 3 sia minore di π . Analogamente è transitiva la relazione di eguaglianza: se $a = b$ e $b = c$, allora $a = c$. Nella vita quotidiana, troviamo che relazioni come “prima di”, “più pesante di”, “più alto di”, “all’interno di”, e centinaia di altre ancora, sono pure transitive.

È facile immaginare relazioni che non siano transitive. Se A è il padre di B , e B è il padre di C , non è mai vero che A è il padre di C . Se A ama B e B ama C , non ne consegue che A ama C . I giochi familiari abbondano di regole transitive (se la mano di poker A batte B e B batte C , allora A batte C), ma alcuni giochi hanno regole non transitive (o intransitive). Considerate il gioco da bambini nel quale, dopo aver contato fino a tre, ognuno mostra il pugno chiuso, che simboleggia “pietra”, due dita stese, per “forbice”, oppure la mano aperta per “carta”. La pietra spezza le forbici, le

forbici tagliano la carta e la carta avvolge la pietra. In questo gioco la relazione vincente è intransitiva.

In matematica incontriamo, di tanto in tanto, soprattutto nella teoria delle probabilità e nella teoria delle decisioni, una relazione che ci si aspetta transitiva e invece non lo è. Quando la non-transitività è così contraria all'intuizione da sconcertare la mente, abbiamo uno dei cosiddetti paradossi non transitivi.

Il più antico e noto dei paradossi di questo tipo riguarda il voto ed è talvolta chiamato “paradosso di Arrow”, in ricordo di Kenneth J. Arrow, per il suo ruolo cruciale nel “teorema di impossibilità” da lui enunciato, per il quale ha condiviso il premio Nobel per l'economia nel 1972. Nella sua opera *Social Choice and Individual Values*, Arrow formulò cinque condizioni che quasi tutti consideriamo essenziali per qualunque forma di democrazia nella quale le decisioni sociali sono basate sulle preferenze individuali espresse con il voto. Arrow ha dimostrato che le cinque condizioni sono logicamente incompatibili. Non è possibile concepire un sistema di voto che non violi, in certi casi, almeno una delle cinque condizioni fondamentali. In breve: un sistema di voto perfettamente democratico è *a priori* impossibile.

Per meglio comprendere il paradosso delle votazioni, cominciamo esaminando un difetto fondamentale del nostro attuale sistema di elezione nell'Unione Europea. È frequente che tale sistema faccia salire al potere una persona cordialmente detestata dalla maggioranza dei votanti, ma appoggiata da una minoranza di sostenitori entusiasti. Supponiamo che il 40 per cento dell'elettorato sostenga strenuamente il candidato *A*. L'opposizione è divisa tra un 30 per cento a favore di *B* e un 30 per cento a favore di *C*. *A* sarà eletto anche se il 60 per cento degli elettori non lo vuole.

Una delle proposte più popolari per evitare tali conseguenze del voto diviso fra più candidati consiste nel permettere ai votanti di esprimere il voto ordinando la lista completa dei candidati in ordine di preferenza. Purtroppo però, anche questa procedura può condurre a decisioni irrazionali. La matrice nella figura 26 (sinistra) mostra questo noto paradosso elettorale nella sua forma più semplice. La riga superiore mostra che un terzo dei votanti preferisce A , B e C nell'ordine ABC . La riga centrale mostra che un altro terzo preferisce BCA , mentre la fila in basso mostra che il restante terzo preferisce CAB . Esaminate attentamente la matrice e, confrontando i candidati a due a due, scoprirete che dietro a questo sistema fa capolino l'intransitività delle preferenze. Due terzi dei votanti preferiscono A a B , due terzi preferiscono B a C e due terzi preferiscono C ad A . Se A si presenta contro B , vince A . Se B si presenta contro C , vince B . Se C si presenta contro A , vince C . Sostituite i can-

ORDINE DI PREFERENZA

1 2 3

$\frac{1}{3}$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
$\frac{1}{3}$	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
$\frac{1}{3}$	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

Fig. 26. Il paradosso delle votazioni (*sinistra*)

didati con proposte legislative, e vedrete con quale facilità il partito al potere può predeterminare una decisione parlamentare semplicemente scegliendo la coppia di proposte da votare per prime.

Il paradosso fu riconosciuto dal marchese di Condorcet e da altri alla fine del XVIII secolo, ed è conosciuto in Francia come effetto Condorcet. Lewis Carroll, che scrisse diversi pamphlet sui problemi delle votazioni, lo riscoprì. La maggior parte dei primi sostenitori della rappresentanza proporzionale ignorava completamente questo tallone di Achille; infatti, il paradosso non fu completamente riconosciuto dagli studiosi di teoria politica sino alla metà degli anni quaranta, quando Duncan Black, un economista gallese, lo riscoprì in connessione con il suo monumentale studio sui processi decisionali collettivi.

Arrow ipotizza che i requisiti ragionevoli per un sistema di voto equo:

- **Universalità:** la funzione di scelta sociale dovrebbe creare un ordinamento delle preferenze sociali deterministico e completo, a partire da qualsiasi insieme iniziale di preferenze individuali;
- **non imposizione:** ogni risultato deve poter essere raggiunto in qualche maniera;
- **non dittatorialità:** la funzione di scelta sociale non deve semplicemente seguire l'ordinamento delle preferenze di un individuo o un sottoinsieme di individui, al contempo ignorando le preferenze degli altri;
- **monotonicità**, o associazione positiva tra i valori individuali e sociali: se un individuo modifica il proprio ordinamento di preferenze promuovendo una data opzione, la funzione di scelta sociale deve promuovere tale opzione o restare invariata, ma non può assegnare a tale opzione una preferenza minore (nessun individuo dovrebbe essere in grado di esprimersi contro un'opzione assegnandole una preferenza maggiore);
- **indipendenza dalle alternative irrilevanti:** se si confina l'attenzione ad un sottoinsieme di opzioni, e la funzione di scelta sociale è applicata ad esse soltanto, il risultato deve essere compatibile con il caso in cui la funzione di scelta sociale è applicata all'intero insieme di alternative possibili.

Il teorema di Arrow afferma che se il gruppo di cittadini votanti comprende almeno due individui e l'insieme delle alternative possibili almeno tre opzioni, non è possibile costruire una funzione di scelta sociale che soddisfi al contempo tutti i requisiti sopra enunciati.

*Nei libri di Martin Gardner troviamo
tanti altri temi interessanti, rilevanti
e - per gli insegnanti -
didatticamente stimolanti.*

*... leggete Martin Gardner, leggete
Martin Gardner!*



*Grazie per l'attenzione e
arrivederci al prossimo
appuntamento con
Martin Gardner...*