Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore

Progetto Olimpiadi della Matematica

GARA di FEBBRAIO

19 febbraio 2015

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________ Genere: F M

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso:_____ Città:__________

Email:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

1. Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici, libri di testo e tavole numeriche. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; in particolare, è vietato l'uso di telefoni cellulari.
2. La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3. Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4. I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in questa pagina nella relativa finestrella più in basso. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 15**.
6. Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!
7. Per correttezza nei confronti di coloro che facessero la gara in momenti diversi della giornata, ti chiediamo di non diffondere informazioni sul testo e sulle risposte prima delle 20 di questa sera. Grazie!

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Da riempirsi a cura dell'insegnante:

Valutazione esercizi dimostrativi

15	16	17

Punteggio totale
(da foglio di calcolo)

Visitate il sito internet delle olimpiadi:
`http://olimpiadi.dm.unibo.it`
ed il forum delle olimpiadi: `http://www.oliforum.it`

Ringraziamenti:

La gara non sarebbe stata possibile senza la preziosa collaborazione di tutti coloro che hanno proposto, risolto, valutato e modificato i problemi:

Alberto Bucci, Alessandro Iraci, Andrea Barresi, Andrea Bianchi, Andrea Caberletti, Andrea Marino, Angela Veronese, Clara Antonucci, Dario Ascari, Dario Balboni, Davide Lombardo, Emanuele Tron, Fabio Caceffo, Fabio Lilliu, Federica Cecchetto, Francesco Mugelli, Gianluca Tasinato, Gioacchino Antonelli, Giorgio Busoni, Giovanni Barbarino, Giovanni Italiano, Giulia Trevisan, Giuseppe Re, Kirill Kuzmin, Luca Minutillo Menga, Ludovico Pernazza, Marco Golla, Marco Trevisiol, Matteo Migliorini, Nicola Picenni, Paolo Abiuso, Paolo Leonetti, Paolo Monti, Roberto Pagaria, Shuyi Yang, Simone Cappellini e Umberto Pappalettera.

Alessandra Caraceni e Luigi Amedeo Bianchi

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Un numero naturale si dice *palindromo* se è uguale al numero che si ottiene leggendo le cifre della sua scrittura in base dieci da destra verso sinistra (ad esempio, 68386 e 44 sono palindromi, 220 non lo è). Sappiamo che il numero naturale x e il numero $x + 312$ sono entrambi palindromi; x ha quattro cifre, mentre $x + 312$ ne ha cinque. Quanto vale la somma delle cifre di x?

   (A) 30 **(B)** 31 **(C)** 32 **(D)** 33 **(E)** 34

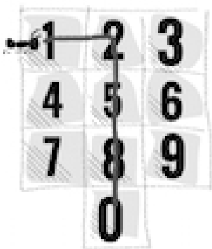
2. Una sequenza $a_1, \ldots, a_{100}$ di numeri reali è tale che la media aritmetica fra due termini consecutivi sia sempre uguale all'indice del secondo termine (ad esempio, si ha $\frac{a_4+a_5}{2} = 5$); quanto vale la somma dei 100 numeri della sequenza?

   (A) 2550 **(B)** 5050 **(C)** 5100 **(D)** 10100 **(E)** Non si può determinare: dipende da a_1.

3. Sia $ABCDE$ un pentagono regolare di lato 1 e sia P l'intersezione tra le diagonali AC e BE. Quanto misura il segmento PC?

   (A) 1 **(B)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ **(C)** $\sqrt{5} - 1$ **(D)** $4(\sqrt{5} - 2)$ **(E)** Nessuna delle precedenti.

4. Una formica cammina sul tastierino numerico di un cellulare, composto da 10 pulsanti disposti come in figura. La formica si sposta sempre dal tasto su cui si trova ad un tasto adiacente in orizzontale o in verticale; parte dal tasto 1 e passeggia per un po' sul tastierino, fermandosi infine sul tasto 0, che non aveva mai visitato prima. Consideriamo il numero n ottenuto concatenando le cifre dei tasti su cui è passata la formica, nell'ordine in cui li ha visitati (ad esempio, il percorso in figura corrisponderebbe al numero 12580). Dire quante delle quattro affermazioni seguenti sono certamente vere:



   - "n **non** è multiplo di 3";
   - "n **non** è multiplo di 8";
   - "n è composto da un numero dispari di cifre";
   - "n **non** è un quadrato".

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

5. Due polinomi monici (cioè con coefficiente di grado massimo uguale a 1) a coefficienti interi $p(x)$ e $q(x)$ sono tali che il loro massimo comun divisore sia $(x - 1)(x - 2)$, il loro minimo comune multiplo sia $(x - 1)^2(x - 2)^3(x - 3)(x + 1)$ e il grado di $p(x)$ sia minore o uguale al grado di $q(x)$. In quanti modi può essere scelto $p(x)$?

   (A) 4 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 12

6. Dato un triangolo ABC, sia A' il simmetrico di A rispetto a C, A'' il simmetrico di A rispetto a B, B' il simmetrico di B rispetto a A, B'' il simmetrico di B rispetto a C, C' il simmetrico di C rispetto a B e C'' il simmetrico di C rispetto a A. Determinare il rapporto tra l'area di $A'B'C'$ e quella dell'esagono $A'A''C'C''B'B''$.

   (A) $\dfrac{6}{13}$ **(B)** $\dfrac{7}{13}$ **(C)** $\dfrac{3}{7}$ **(D)** $\dfrac{1}{2}$ **(E)** Dipende dal triangolo iniziale.

7. Per quante quaterne (a, b, c, d) di numeri interi non negativi le tre espressioni $a^2 - c^2$, $b^2 - d^2$ e $ab + bc + cd + da$ sono tutte uguali a 1024?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 9 **(E)** 11

8. Dato il triangolo ABC rettangolo in A costruiamo sull'ipotenusa il quadrato $BCDE$ (con D, E dalla parte opposta di A rispetto a BC). Sapendo che le aree dei triangoli ABE e ACD valgono rispettivamente 6 m^2 e 27 m^2, quanto vale l'area del triangolo ABC?

   (A) $3\sqrt{2}\ m^2$ **(B)** $6\ m^2$ **(C)** $12\ m^2$ **(D)** $9\sqrt{2}\ m^2$ **(E)** $18\ m^2$

9. Una pedina si trova inizialmente sulla casella centrale di una scacchiera 5×5. Un passo della pedina consiste nello spostarsi in una casella scelta a caso fra quelle che hanno *esattamente un vertice* in comune con la casella su cui si trova. Qual è la probabilità che dopo 12 passi la pedina si trovi in uno qualunque degli angoli della scacchiera?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{4}{25}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{4}{13}$ **(E)** $\frac{1}{4}$

10. Caboyara, famoso circense australiano, si esibisce anche quest'anno in un gran trucco. Predispone una scala spettacolare con $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{2015}$ gradini, dove $p_1, p_2, \ldots, p_{2015}$ sono numeri primi distinti; i gradini che corrispondono a divisori di N (compresi il primo e l'N-esimo gradino) sono speciali e sono inizialmente illuminati di verde.

Durante lo spettacolo, 2015 canguri ammaestrati salgono uno dopo l'altro la scala; per $i = 1, 2, \ldots, 2015$, l'i-esimo canguro salta p_i gradini alla volta, partendo ai piedi della scala (salta sul gradino p_i, poi sul $2p_i$, e così via finché non raggiunge il gradino N). Ogni volta che un canguro salta su un gradino speciale, questo cambia colore: da verde diventa rosso, da rosso verde.

Quanti saranno i gradini speciali illuminati di verde alla fine dell'esibizione?

(A) $2^{2015} - 2^{1008}$ **(B)** 2^{2014} **(C)** $2^{2014} - 2^{1007}$ **(D)** 2^{2013} **(E)** $2015 \cdot 2^{1008}$

11. Giovanni disegna a matita un 9-agono regolare e collega ciascuno dei suoi vertici al centro, tracciando un totale di 18 segmenti e ottenendo in questo modo nove triangoli. Ripassa quindi a penna alcuni dei segmenti tracciati, facendo in modo che alla fine ognuno dei nove triangoli abbia esattamente un lato ripassato a penna. In quanti modi Giovanni può scegliere l'insieme dei segmenti da ripassare? (Nota: due insiemi di segmenti che si ottengano l'uno dall'altro per rotazione o per simmetria sono da considerarsi *distinti*.)

(A) 49 **(B)** 65 **(C)** 74 **(D)** 76 **(E)** 85

12. Sia $ABCD$ un quadrilatero tale che $AB = 24$, $BC = 20$, $CD = 15$, $DA = 7$, $BD = 25$. Quanto è lungo AC?

(A) 18 **(B)** $14\sqrt{2}$ **(C)** 20 **(D)** 21 **(E)** 24

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Quanto vale $\sqrt[4]{2^{20} + 2^{27} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{37} + 2^{40}}$?

14. Una pulce si trova inizialmente su un vertice di un poligono regolare di 2015 lati; compie una sequenza di salti in senso antiorario: al primo salto si sposta di un vertice (da quello iniziale al vicino), al secondo di tre, al terzo di cinque, e così via, di modo che all'n-esimo parte da un vertice e atterra $2n - 1$ vertici più in là, sempre in senso antiorario. Dopo quanti salti accadrà per la prima volta che la pulce atterri su un vertice che aveva già visitato?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Camilla ha una scatola che contiene 2015 graffette. Ne prende un numero positivo n e le mette sul banco di Federica, sfidandola al seguente gioco. Federica ha a disposizione due tipi di mosse: può togliere 3 graffette dal mucchio che ha sul proprio banco (se il mucchio contiene almeno 3 graffette), oppure togliere metà delle graffette presenti (se il mucchio ne contiene un numero pari). Federica vince se, con una sequenza di mosse dei tipi sopra descritti, riesce a togliere tutte le graffette dal proprio banco.

(a) Per quanti dei 2015 possibili valori di n Federica può vincere?

(b) Le ragazze cambiano le regole del gioco e decidono di assegnare la vittoria a Federica nel caso riesca a lasciare sul banco una singola graffetta. Per quanti dei 2015 valori di n Federica può vincere con le nuove regole?

SOLUZIONE:

Nome:____________________Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso tale che $AB = AC = AD$ e $BC < CD$. La bisettrice dell'angolo $\widehat{BAD}$ interseca internamente CD in M e il prolungamento di BC in N. Dimostrare che

(a) il quadrilatero $ABCM$ è inscrittibile in una circonferenza;

(b) i triangoli ANB e ABM sono simili.

SOLUZIONE:

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia n un intero positivo e siano $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ i suoi divisori positivi, ordinati per grandezza. Si sa che $k \geq 4$ e che $d_3^2 + d_4^2 = 2n + 1$.

(a) Trovare tutti i possibili valori di k.

(b) Trovare tutti i possibili valori di n.

SOLUZIONE:

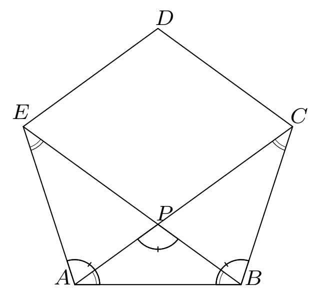
Nome:____________________________ Cognome:____

Soluzione dei Quesiti

1. La risposta è **(E)**. Se x è un numero di 4 cifre (dunque minore di 10000), $x + 312$, che deve averne 5, è compreso fra 10000 e 10311 (estremi inclusi). Questo significa che le prime due cifre di $x+312$ sono 1 e 0; poiché si tratta di un numero palindromo, deve dunque essere della forma $10a01$ per una qualche cifra a. D'altra parte, $x = 10a01 - 312$ termina con 89; ne consegue che l'unica possibilità per x è 9889, e in effetti $9889 + 312 = 10201$ ha 5 cifre ed è palindromo. In conclusione, la somma delle cifre di x è $9 + 8 + 8 + 9 = 34$.

2. La risposta è **(C)**. Indichiamo con S la somma dei 100 termini della successione. Si ha:
$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{99} + a_{100}) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \ldots + \frac{a_{99} + a_{100}}{2}.$$
Osserviamo che ciascuno degli addendi del membro più a destra è la media aritmetica fra due termini consecutivi della sequenza, che sappiamo essere uguale all'indice del secondo termine. Si ottiene quindi
$$\frac{S}{2} = 2 + 4 + \ldots + 100 = 2\,(1 + 2 + \ldots + 50),$$
e ricordando che la somma dei primi n numeri interi vale $\dfrac{n(n+1)}{2}$ si conclude che
$$S = 4\,(1 + 2 + \ldots + 50) = 4 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 5100.$$

3. La risposta è **(A)**.
Prima soluzione
Gli angoli interni di un n-agono regolare misurano $\frac{n-2}{n}180°$. Quindi gli angoli interni di un pentagono regolare misurano $\frac{3}{5}180° = 108°$. I triangoli EAB e CBA sono isosceli, quindi $\widehat{AEB} = \widehat{EBA} = \widehat{BCA} = \widehat{CAB} = \frac{180°-108°}{2} = 36°$. Allora $\widehat{APB} = 180° - \widehat{PAB} - \widehat{PBA} = 108°$, $\widehat{CPB} = 180° - \widehat{APB} = 72°$ e $\widehat{CBP} = \widehat{CBA} - \widehat{PBA} = 72°$. Quindi il triangolo CBP è isoscele e $CP = CB = 1$.



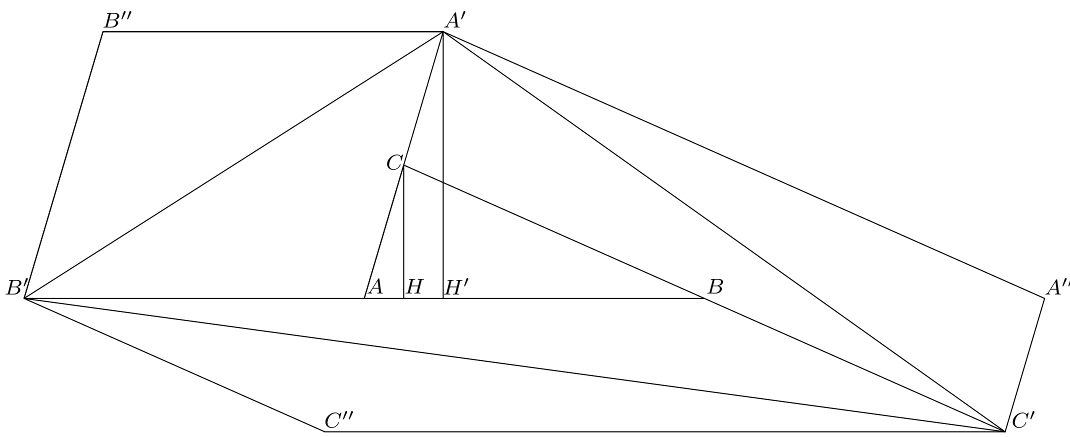
Seconda soluzione
Per simmetria, la diagonale AC è parallela al lato DE e la diagonale BE è parallela al lato CD; ne segue che il quadrilatero $EPCD$ è un parallelogramma e quindi che $PC = ED = 1$.

4. La risposta è **(D)**. La prima affermazione non è necessariamente vera, dal momento che la formica può comporre il numero 14580, che è multiplo di 3 (la somma delle sue cifre è 18). È invece vero che n non può essere multiplo di 8: sappiamo che n finisce per 580, 780 o 980; se n fosse divisibile per 8, anche $n - 80$ lo sarebbe, ma $n - 80 = 100 \cdot d$, dove d è dispari, dunque è multiplo di 4 ma non di 8. È vero anche che n è composto da un numero dispari di cifre: la formica si sposta sempre da una cifra dispari a una cifra pari e viceversa; il percorso comincia sul tasto 1 (dispari) e finisce sul tasto 0 (pari), quindi la formica deve compiere un numero pari di spostamenti, il che corrisponde a un numero dispari di tasti premuti. Infine, è vero anche che n non può essere un quadrato: dato che n finisce per 0, è divisibile per 10; ma se n fosse un quadrato, sarebbe allora divisibile per 100 (e non lo è, dato che non termina con due zeri). In conclusione, tre delle quattro affermazioni sono certamente vere.

5. La risposta è **(C)**. Consideriamo i quattro fattori del minimo comune multiplo $A(x) = (x - 1)^2$, $B(x) = (x-2)^3$, $C(x) = x-3$ e $D(x) = x+1$. Perché il minimo comune multiplo di $p(x)$ e $q(x)$ sia $A(x)B(x)C(x)D(x)$, è necessario che ciascuno dei quattro fattori divida almeno uno dei due polinomi; d'altra parte, ciascun fattore divide esattamente uno dei due polinomi, o dividerebbe il massimo comun divisore dei due (che sappiamo valere $(x-1)(x-2)$). Ignoriamo dapprima la condizione sul grado dei due polinomi. Una volta deciso quali dei quattro fattori compaiano in $p(x)$, esso è determinato: si tratta del minimo comune multiplo tra il prodotto dei fattori scelti

e $(x-1)(x-2)$; allo stesso modo, anche $q(x)$ è determinato: è il minimo comune multiplo fra i fattori non scelti e $(x-1)(x-2)$. Si noti che $p(x)$ e $q(x)$ non possono avere lo stesso grado, poiché il loro prodotto risulta $A(x)B(x)C(x)D(x)(x-1)(x-2)$, che ha grado 9, dunque dispari. Sappiamo, in conclusione, che il numero di coppie ordinate di polinomi $(p(x), q(x))$ con massimo comun divisore e minimo comune multiplo dati è $2^4 = 16$ (il numero di sottoinsiemi dell'insieme dei quattro fattori $A(x), B(x), C(x), D(x)$). D'altra parte, scambiare i due polinomi della coppia inverte la disuguaglianza (che sappiamo essere stretta) fra i gradi: esattamente una coppia ogni due è tale che il grado di $p(x)$ sia maggiore di quello di $q(x)$. La risposta corretta è quindi 8.

6. La risposta è **(B)**. Il segmento $A'B''$ è il simmetrico del segmento AB rispetto al punto C. Quindi $A'B''$ e AB sono paralleli e congruenti. Inoltre $AB' = AB$ perché B' è il simmetrico di B rispetto a A. Quindi il quadrilatero $AB'B''A'$ è un parallelogramma perché ha una coppia di lati opposti paralleli e congruenti. Siano CH un'altezza di ABC e $A'H'$ un'altezza di $AB'B''A'$. I triangoli CAH e $A'AH'$ sono rettangoli e hanno l'angolo $\widehat{CAH}$ in comune, quindi sono simili. Allora, dato che $AA' = 2AC$, si ha $A'H' = 2CH$. Quindi $S(AB'B''A') = AB' \cdot A'H' = AB \cdot 2CH = 4\left(\frac{1}{2}AB \cdot CH\right) = 4S(ABC)$. Inoltre $S(AB'A') = \frac{1}{2}S(AB'B''A') = 2S(ABC)$. Analogamente, $S(CA'A''C') = 4S(ABC)$, $S(CA'C') = 2S(ABC)$, $S(BC'C''B') = 4S(ABC)$ e $S(BC'B') = 2S(ABC)$. Allora $S(A'B'C') = S(AB'A') + S(CA'C') + S(BC'B') + S(ABC) = 7S(ABC)$, mentre $S(A'A''C'C''B'B'') = S(AB'B''A') + S(CA'A''C') + S(BC'C''B') + S(ABC) = 13S(ABC)$. Quindi $S(A'B'C')/S(A'A''C'C''B'B'') = 7/13$.



7. La risposta è **(B)**. Scriviamo le tre equazioni nella forma $(a+c)(a-c) = 1024$, $(b+d)(b-d) = 1024$ e $(a+c)(b+d) = 1024$. Si osservi che $a+c$ e $a-c$ non possono essere nulli, dal momento che $(a+c)(a-c) = 1024$. Confrontando prima e terza equazione otteniamo allora $b+d = \frac{1024}{a+c} = a-c$, che sostituito nella seconda fornisce $(b-d)(a-c) = 1024 = (a+c)(a-c)$, da cui $b-d = a+c$; sottraendo (membro a membro) questa equazione da $b+d = a-c$ troviamo $2d = -2c$. I numeri c e d sono quindi o entrambi uguali a zero, o di segno opposto; dato che per ipotesi c e d sono entrambi non-negativi si deve allora avere $c = d = 0$. Il sistema iniziale si riduce quindi alle equazioni $a^2 = b^2 = ab = 1024 = 32^2, c = d = 0$, che ammettono come unica soluzione negli interi non-negativi la quaterna $(a, b, c, d) = (32, 32, 0, 0)$.

8. La risposta è **(D)**.

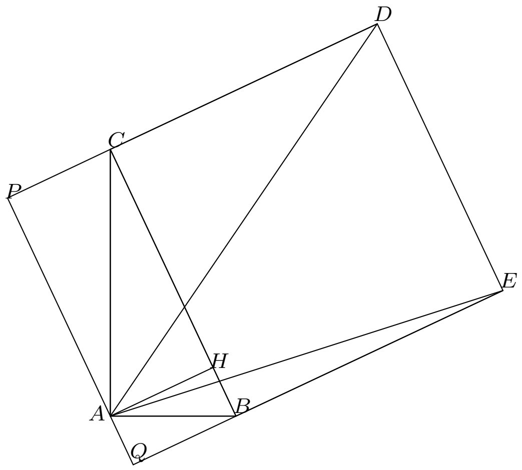
   Prima soluzione

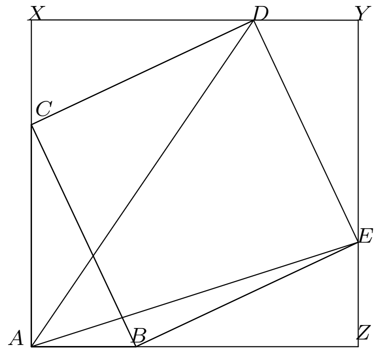
   Mostriamo che il prodotto delle due aree fornite è uguale al quadrato dell'area del triangolo ABC cercata. Siano P il piede dell'altezza uscente dal vertice A del triangolo ACD, Q il piede dell'altezza uscente dal vertice A del triangolo ABE, H il piede dell'altezza uscente dal vertice A del triangolo ABC. Il quadrilatero $APCH$ è, per costruzione, un rettangolo (gli angoli in P e H sono retti perché formati da altezze, l'angolo in C è complementare di un angolo retto) dunque AP è congruente a CH; allo stesso modo, AQ è congruente a BH. Sappiamo perciò che $S(ACD) = \frac{1}{2}CD \cdot CH$ e $S(ABE) = \frac{1}{2}BE \cdot BH$; ma, poiché $CD = BE = CB$ e poiché

$CH \cdot BH = AH$ per il teorema di Euclide, il prodotto delle due aree vale

$$\frac{CD \cdot CH}{2} \frac{BE \cdot BH}{2} = \frac{CB^2 \cdot CH \cdot BH}{4} = \left(\frac{CB \cdot AH}{2}\right)^2 = S(ABC)^2.$$

Perciò l'area di ABC vale $\sqrt{27\ m^2 \cdot 6\ m^2} = 9\sqrt{2}\ m^2$.



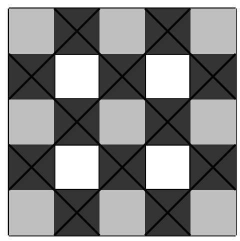


Seconda soluzione

Si tracci il quadrato $AXYZ$ tale che B sia sul lato ZA, C sia sul lato AX, D sia sul lato XY ed E sia sul lato YZ. Si noti che i triangoli ABC, XCD, DYE ed EZB sono congruenti: hanno angoli congruenti e la stessa ipotenusa. D'altra parte, DX (che è congruente ad AC) è l'altezza relativa ad AC nel triangolo ACD, perciò l'area del triangolo ACD vale $AC^2/2$. Allo stesso modo, poiché CZ e AB sono congruenti, l'area del triangolo ABE vale $AB^2/2$. Dunque per l'area S del triangolo ABC si ha

$$S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \sqrt{\frac{AB^2}{2} \cdot \frac{AC^2}{2}} = \sqrt{27\ m^2 \cdot 6\ m^2} = 9\sqrt{2}\ m^2.$$

9. La risposta è **(E)**. Si consideri la scacchiera colorata come in figura; un passo della pedina può solo condurla da una casella bianca a una casella grigia, e viceversa: ne consegue che, dopo un numero dispari di passi, la pedina non può che trovarsi in una delle quattro caselle bianche. Qualunque sia la casella bianca in cui la pedina si trova dopo 11 passi, vi sono 4 caselle che essa può raggiungere con il dodicesimo passo, una sola delle quali è una casella d'angolo. La probabilità che la pedina si trovi in un angolo dopo 12 passi (così come dopo un qualunque numero positivo pari di passi) è quindi 1/4.



10. La risposta è **(B)**. Dato il gradino speciale corrispondente al divisore d di N, l'i-esimo canguro vi salterà sopra se e solo se il primo p_i è un fattore di d; la luce del gradino cambierà quindi colore tante volte quanti sono i fattori primi di d: sarà verde alla fine dell'esibizione se e solo se d ha un numero pari di fattori primi. D'altronde, per ogni divisore d di N con un numero dispari di fattori primi, il divisore N/d (che è diverso da d, dato che N non è un quadrato) ne ha un numero pari, e viceversa: quindi le luci verdi saranno esattamente la metà dei divisori di N. Il numero totale di gradini speciali (ovvero di divisori positivi di N) è uguale al numero di sottoinsiemi dell'insieme $\{p_1, \ldots, p_{2015}\}$, ossia 2^{2015}. Perciò il numero finale di luci verdi sarà 2^{2014}.

11. La risposta è **(D)**.

Prima soluzione

Chiameremo *raggi* i 9 segmenti che ammettono il centro del 9-agono come vertice.

Si noti anzitutto che scegliere l'insieme dei segmenti da ripassare a penna equivale a scegliere un sottoinsieme dei 9 reggi che non contenga due raggi consecutivi: naturalmente Giovanni non può ripassare due raggi consecutivi; d'altra parte, una volta scelti i raggi da ripassare, ciascun lato del 9-agono verrà ripassato se e solo se non è stato ripassato nessuno dei due raggi che condividono un vertice con il lato in questione.

Contiamo le configurazioni possibili a seconda del numero di raggi ripassati.

0 - una sola configurazione;

1 - 9 scelte per il raggio da ripassare;

2 - scelto un raggio, il secondo raggio può essere uno qualunque dei restanti, fatta eccezione per i due vicini del raggio iniziale; il numero di configurazioni è dunque la metà del numero di coppie ordinate ottenute in questo modo ($\frac{1}{2}9 \cdot 6$), cioè 27;

3 - il numero totale di scelte possibili per un sottoinsieme di tre raggi, ignorando la restrizione, è $\frac{1}{6}9 \cdot 8 \cdot 7$, cioè 84; tra queste, esattamente 9 sono scelte di tre raggi consecutivi; rimane da decidere quante siano le configurazioni formate da due raggi consecutivi e un terzo raggio non consecutivo a nessuno degli altri due. La coppia di raggi consecutivi può essere scelta in 9 modi; a quel punto, ci sono 5 scelte per il raggio 'isolato'. Ne consegue che ci sono $84 - 9 - 45 = 30$ configurazioni accettabili;

4 - in questo caso vi è esattamente una coppia di raggi scelti separati da una coppia di raggi consecutivi non scelti (al di fuori di questo intervallo, raggi scelti e non scelti si alternano); le configurazioni sono tante quante le coppie di raggi consecutivi, cioè 9.

In tutto, contiamo $1 + 9 + 27 + 30 + 9 = 76$ configurazioni possibili.

Seconda soluzione

Consideriamo una variante del problema originale: Giovanni disegna un n-agono regolare a matita, tracciando poi n segmenti che congiungono i vertici al centro; si formano così n triangoli. Diversamente dal problema originale, supponiamo che Giovanni scelga uno dei segmenti che hanno il centro come vertice e decida di non ripassarlo a penna: chiameremo questo segmento *speciale*. Chiamiamo $f(n)$ il numero di modi che Giovanni ha a disposizione per scegliere un sottoinsieme degli altri $2n - 1$ segmenti da ripassare, sempre in modo che ciascuno degli n triangoli abbia alla fine esattamente un segmento ripassato a penna.

Notiamo che, se $n > 4$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Consideriamo il triangolo che giace a destra del segmento speciale; esso deve avere un segmento ripassato a penna, che può essere un lato dell'n-agono o un segmento che ha il centro per vertice. Se Giovanni ripassa il lato dell'n-agono a penna, ha $f(n-1)$ modi di scegliere gli altri segmenti da ripassare: può eliminare il lato ripassato e identificare gli altri due lati del triangolo in questione, rendendoli il segmento speciale di una nuova configurazione con $n - 1$ triangoli. Se Giovanni ripassa il lato del triangolo adiacente al centro dell'n-agono, allora non può ripassare nessun altro lato del triangolo che gli giace sulla destra; può dunque eliminare due triangoli, come nel passaggio precedente, per ottenere una configurazione con $n - 2$ triangoli e un segmento speciale.

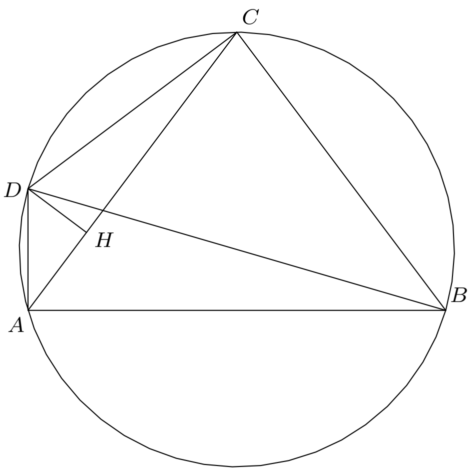
Mostriamo ora che la risposta al problema originale è $f(7) + f(9)$. Scegliamo uno qualunque dei raggi del 9-agono. Se questo non viene ripassato, allora possiamo considerarlo come segmento speciale: vi sono $f(9)$ modi di scegliere i segmenti da ripassare; in caso contrario, possiamo eliminare i due triangoli ad esso adiacenti, identificando i due raggi fra i quali sono compresi: i raggi identificati non possono essere ripassati, e sono dunque un segmento speciale per la configurazione con 7 triangoli.

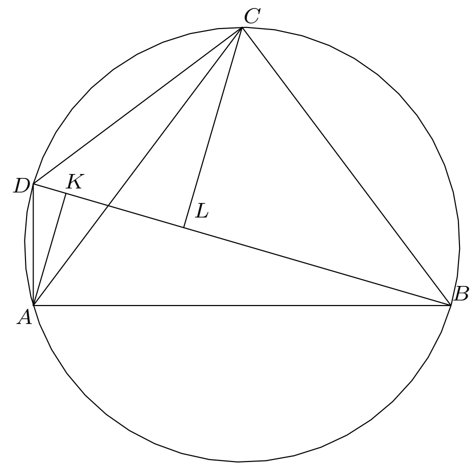
È facile verificare che $f(3) = 3$ e $f(4) = 5$ enumerando le configurazioni; di conseguenza, $f(5) = 8$; $f(6) = 13$; $f(7) = 21$; $f(8) = 34$; $f(9) = 55$. La risposta è $f(7) + f(9)$, cioè 76.

12. La risposta è **(C)**.

Prima soluzione

Dato che $AB^2 + AD^2 = BD^2$ e $BC^2 + CD^2 = BD^2$ il quadrilatero $ABCD$ si può inscrivere in una circonferenza di diametro BD. Sia DH l'altezza del triangolo DAC. Allora il triangolo AHD è simile al triangolo BCD perché sono entrambi triangoli rettangoli e $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \widehat{HAD}$, in quanto angoli alla circonferenza che insistono su CD. Quindi $BD : BC = AD : AH$, cioè $25 : 20 = 7 : AH$ da cui ricaviamo che la lunghezza di AH vale $28/5$. Analogamente il triangolo CDH è simile al triangolo BDA, da cui $BD : AB = CD : HC$, ovvero $25 : 24 = 15 : HC$, che dà $HC = 72/5$. La lunghezza di AC risulta quindi $AH + HC = (28 + 72)/5 = 20$.





Seconda soluzione

Si può osservare che $25^2 = 20^2 + 15^2$, cioè $(15, 20, 25)$ è una terna pitagorica $(5 \cdot (3, 4, 5))$, dunque l'angolo $\widehat{BCD}$ è retto. Si ha anche $25^2 = 24^2 + 7^2$: anche $(7, 24, 25)$ è una terna pitagorica e l'angolo $\widehat{DAB}$ è retto.

Siano AK e CL le altezze dei triangoli rettangoli ABD e BCD relative a BD; possiamo ricavarne le lunghezze dalle aree dei due triangoli: $AK = (AD \cdot AB)/BD = (24 \cdot 7)/25$, mentre $CL = (BC \cdot CD)/BD = (20 \cdot 15)/25$. Per il primo teorema di Euclide si ha $DK \cdot DB = AD^2$, da cui ricaviamo che la lunghezza di DK vale $7^2/25$; similmente si calcola la lunghezza di DL, come $DC^2/DB = 15^2/25 = 9$.

Infine, AC si può vedere come la diagonale di un rettangolo con lati di lunghezza $AK + CL$ e KL; per il teorema di Pitagora, la sua lunghezza vale

$$\sqrt{(AK + CL)^2 + (DL - DK)^2} = \sqrt{\left(\frac{168}{25} + 12\right)^2 + \left(9 - \frac{49}{25}\right)^2} = 20.$$

Terza soluzione

Come nelle precedenti soluzioni, occorre dapprima dimostrare che $ABCD$ è inscrittibile in una circonferenza. Mostrato questo, è possibile concludere direttamente grazie al teorema di Tolomeo, il quale afferma che un quadrilatero convesso $ABCD$ è inscrittibile in una circonferenza se e solo se $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Se ne ricava che la lunghezza di AC è 20.

13. La risposta è 1056. Una volta raccolto un fattore 2^{20} sotto la radice quarta, ci si riconduce a calcolare $\sqrt[4]{1 + 2^7 + 2^{11} + 2^{12} + 2^{17} + 2^{20}}$. A questo punto è possibile riconoscere nell'espressione sotto radice il quadrato del trinomio $1 + 2^6 + 2^{10} = (2^5 + 1)^2$ o direttamente verificare che si tratti della potenza quarta di $2^5 + 1$. L'espressione nel suo complesso vale dunque $2^5(2^5 + 1)$, ovvero 1056.

14. La risposta è 48. Osserviamo che dopo n passi la pulce ha coperto una distanza totale di n^2 vertici dal punto di partenza: questo è chiaramente vero per $n = 0$ e $n = 1$, e d'altro canto, se dopo n passi la pulce ha coperto una distanza di n^2 vertici, allora al passo successivo la distanza percorsa sarà $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. Supponiamo allora che la pulce tocchi un vertice due volte, la prima volta quando la distanza coperta è m^2, la seconda quando è n^2. Questo succede solo se la differenza tra n^2 e m^2 corrisponde ad un numero intero di giri del 2015-agono, ovvero se e solo se 2015 divide $n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$, e stiamo cercando il più piccolo n per cui questo sia possibile. Prendiamo n, m (con n minimo) e scriviamo $n - m = ax$, $n + m = by$, con $ab = 2015$ e x, y interi positivi. Notiamo ora che $x = y = 1$: in effetti, i numeri $n' = \frac{a+b}{2}, m' = \frac{a-b}{2}$ sono interi

(a e b sono divisori di 2015, quindi entrambi dispari) e rispettano $(n'+m')(n'-m') = ab = 2015$, dunque forniscono una coppia $(m')^2, (n')^2$ corrispondente ad un vertice visitato due volte; ora se x o y fossero maggiori di 1 avremmo anche $n' = \frac{a+b}{2} < \frac{ax+by}{2} = n$, il che contraddirebbe la minimalità di n. Vogliamo quindi studiare l'equazione $n^2 - m^2 = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, e più precisamente distribuire i fattori primi $5, 13, 31$ tra $n+m$ e $n-m$ in modo da minimizzare n. È allora facile rendersi conto che il minimo si ottiene per $n+m = 5 \cdot 13$, $n-m = 31$, il che fornisce $n = 48$ e $m = 17$.

15. (a) Federica vince se e solo se n è multiplo di 3.

    Se n è multiplo di 3 Federica può vincere: le basta effettuare la mossa con la quale toglie tre graffette dal banco esattamente $n/3$ volte.

    D'altra parte, se ad un certo punto sul banco di Federica c'è un numero di graffette non multiplo di tre, tutte le mosse a disposizione di Federica lasciano sul banco un numero di graffette nuovamente non multiplo di 3: se k è pari ma non multiplo di 3, neanche $k/2$ può essere multiplo di tre; d'altra parte; allo stesso modo, se k non è multiplo di 3, nemmeno $k-3$ lo è. Di conseguenza, se Federica comincia il gioco con un numero di graffette non multiplo di 3, qualunque sequenza di mosse condurrà a un numero di graffette anch'esso non multiplo di 3; Federica non ha quindi modo di togliere tutte le graffette, visto che 0 è multiplo di 3.

    In conclusione, Federica riesce a vincere se n è un multiplo di 3 compreso fra 1 e 2015: vi sono 671 valori possibili per n.

    (b) Stavolta Federica riesce a vincere se e solo se n non è multiplo di 3.

    Se n non è multiplo di 3 lo possiamo scrivere come $3k + r$, dove r è il resto della divisione per 3, e dunque è 1 o 2. Applicando k volte la prima mossa, Federica ottiene 1 (nel qual caso ha vinto) o 2 (nel qual caso usa la seconda mossa e vince).

    Resta da dimostrare che se n è multiplo di 3, allora Federica non arriverà mai ad 1. Basta dimostrare che se Federica applica una mossa su un numero multiplo di 3 ottiene un numero che è multiplo di 3 (e quindi in particolare non può raggiungere 1). Questo è vero, perché se $a = 3k$ è multiplo di 3, allora lo sono anche $a - 3 = 3(k-1)$ e $\frac{a}{2} = 3\frac{k}{2}$.

    Quindi Federica riesce a vincere per $2015 - 671 = 1344$ valori di n.

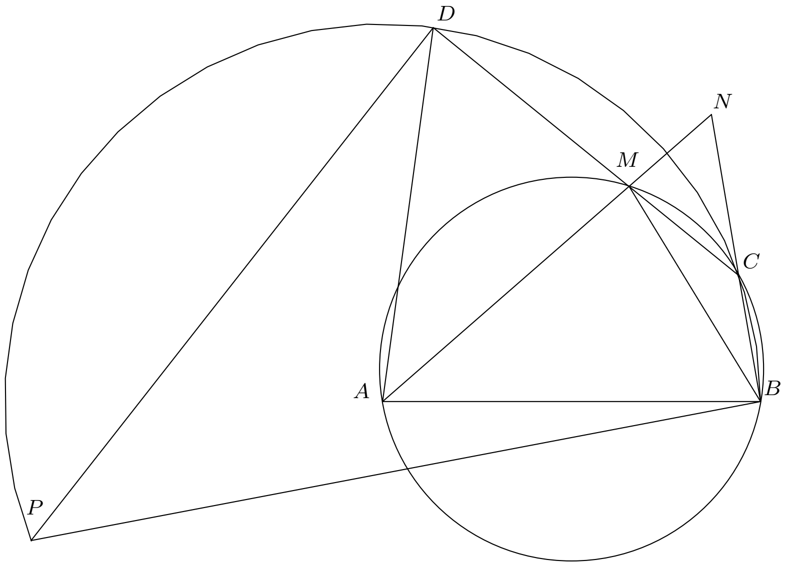
16. (a) Prima soluzione

    Sia Γ la circonferenza centrata in A e passante per B, C, D. Sia inoltre P un qualsiasi punto sull'arco BD che non contiene C. Poiché l'angolo alla circonferenza $\widehat{BPD}$ insiste sullo stesso arco dell'angolo al centro $\widehat{BAD}$, vale $\widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{BPD}$; d'altra parte, $\widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{BAM}$ per costruzione, quindi $\widehat{BPD} = \widehat{BAM}$. Inoltre gli angoli $\widehat{BPD}$ e $\widehat{BCD}$ insistono sullo stesso arco, ma da parti opposte: sono dunque supplementari. Ne risulta che gli angoli $\widehat{BAM}$ e $\widehat{BCM}$ sono supplementari, e cioè che il quadrilatero $AMBC$ può essere inscritto in una circonferenza, che chiameremo γ.

    Seconda soluzione

    Il quadrilatero $AMCB$ è inscrittibile in una circonferenza se e solo se $\widehat{BAM} + \widehat{BCM} = 180°$, ovvero se e solo se $2 \cdot \widehat{BAM} + 2 \cdot \widehat{BCM} = 360°$. Ora, $2 \cdot \widehat{BAM} = \widehat{BAD}$ per costruzione; d'altra parte, $\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = \widehat{CBA} + \widehat{CDA}$. La tesi è dunque equivalente a $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} + \widehat{CBA} + \widehat{CDA} = 360°$, che è vero in quanto la somma contiene precisamente gli angoli interni del quadrilatero $ABCD$.

    (b) $\widehat{BMA} = \widehat{BCA}$ in quanto insistono entrambi sull'arco AB di γ. Inoltre $\widehat{BCA} = \widehat{CBA}$ in quanto angoli alla base del triangolo ABC che è isoscele per ipotesi. I triangoli ABM e ANB hanno quindi $\widehat{BMA} = \widehat{NBA}$ per quanto appena dimostrato, e l'angolo in $\widehat{A}$ in comune, quindi sono simili grazie al secondo criterio di similitudine.



17. (a) Per prima cosa, osserviamo d_4 non può essere minore o uguale a $\sqrt{n}$, perché altrimenti $d_3^2+d_4^2$ sarebbe minore di $(\sqrt{n}-1)^2+\sqrt{n}^2 < 2n+1$, mentre sappiamo che vale $2n+1$. Allo stesso modo, se d_3 fosse maggiore o uguale a $\sqrt{n}$ si avrebbe $d_3^2+d_4^2 > 2n+1$, nuovamente una contraddizione: quindi $d_3 < \sqrt{n} < d_4$, e in particolare $\sqrt{n}$ non è un divisore di n.

Osserviamo inoltre che se d è un divisore di n allora anche n/d lo è, e questa operazione scambia i divisori maggiori di $\sqrt{n}$ con quelli minori di $\sqrt{n}$. Ne segue che n ha tanti divisori maggiori di $\sqrt{n}$ quanti divisori minori di $\sqrt{n}$: siccome questi sono 3 per quanto appena detto, n ha 6 divisori.

(b) Prima soluzione

Notiamo che si ha anche $d_3d_4 = n$: il più piccolo divisore superiore a $\sqrt{n}$ (cioè d_4) è uguale a n/d, dove d è il più grande divisore inferiore a $\sqrt{n}$ (cioè d_3). Dall'equazione $d_3^2+d_4^2 = 2n+1$ deduciamo allora $d_3^2+d_4^2 = 2d_3d_4+1$, cioè $(d_3-d_4)^2 = 1$, e quindi $d_4 - d_3 = 1$ (dato che $d_4 > d_3$). Il numero n si scrive allora $n = d_3(d_3+1)$, ed in particolare è pari, perché uno dei due fattori d_3, d_3+1 lo è. I divisori di n sono quindi $1, 2, d_3, d_3+1, \frac{n}{2}, n$.

Siccome i divisori di d_3 sono anche divisori di n, o d_3 non ha divisori diversi da 1 e d_3 (e quindi è primo), oppure il suo unico divisore non banale è 2 (e quindi $d_3 = 4$). Nel secondo caso abbiamo $n = d_3(d_3+1) = 4\cdot 5 = 20$, e altrimenti ripetiamo lo stesso ragionamento con i divisori di d_3+1: se d_3 è primo d_3+1 è pari, e d'altro canto non può avere divisori non banali diversi da 2, quindi $d_3+1 = 4$ e $n = d_3(d_3+1) = 12$.

Infine, si verifica facilmente che $n = 12$ e $n = 20$ sono effettivamente soluzioni (nei due casi si ha $d_3^2+d_4^2 = 3^2+4^2 = 25 = 2\cdot 12+1$, $d_3^2+d_4^2 = 16+25 = 41 = 2\cdot 20+1$), e per quanto già detto sono le sole.

Seconda soluzione

Esattamente uno tra d_3 e d_4 è pari: se d_3, d_4 avessero la stessa parità, allora $d_3^2+d_4^2 = 2n+1$ sarebbe pari, cosa che chiaramente non è. Inoltre $d_3d_4 = n$: il più piccolo divisore superiore a $\sqrt{n}$ (cioè d_4) è uguale a n/d, dove d è il più grande divisore inferiore a $\sqrt{n}$ (cioè d_3). I divisori di n sono quindi $1, 2, d_3, n/d_3, n/2, n$.

Siccome i divisori di d_3 sono anche divisori di n, o d_3 non ha divisori diversi da 1 e d_3 (e quindi è primo), oppure il suo unico divisore non banale è 2 (e quindi $d_3 = 4$). Similmente, gli unici possibili divisori di d_4 sono $1, 2, d_3$, ma se d_3 dividesse d_4 allora d_3 dividerebbe d_3^2, d_4^2 e n e quindi, per differenza, dividerebbe $d_3^2+d_4^2-2n = 1$, assurdo. Quindi anche d_4 è o un primo o uguale a 4. Se $d_4 = 4$, allora si ha $2 = d_2 < d_3 < d_4 = 4$ e quindi $d_3 = 3$, $n = 12$. Altrimenti $d_3 = 4$, d_4 è un primo p, e $n = 4p$. L'equazione del testo diventa allora $4^2+p^2 = 8p+1$, che ha come soluzioni $p = 5, p = 3$. Siccome $p = d_4 > d_3 = 4$, l'unica possibilità è $p = 5$, che porta all'altra soluzione $n = 20$.

Scale di valutazione degli esercizi dimostrativi

Esercizio 15

Ovviamente si assegnino **15 punti** per una soluzione completa, anche con traccia diversa dalla soluzione proposta.
La dimostrazione del punto **(a)** vale **7 punti**, la dimostrazione del punto **(b)** vale **8 punti**.

Per dimostrazioni parziali del punto **(a)** si assegnino punteggi parziali secondo le seguenti indicazioni:

- **un punto** per chi *dichiara* 671 come soluzione;
- **un punto** per chi *dichiara* che per n multiplo di 3 Federica vince;
- **2 punti** per chi *dimostra* il punto precedente, osservando che per Federica è sufficiente continuare ad utilizzare la prima mossa (togliere 3 graffette) finché non arriva a zero;
- **un punto** per chi *dichiara* che Federica vince solo con n multiplo di 3;
- **2 punti** per chi *dimostra* che con le mosse a sua disposizione Federica non può passare da un numero di graffette non multiplo di 3 ad uno multiplo di 3, e quindi non può esistere una sequenza di mosse che conduca da un numero di graffette non multiplo di 3 a zero.

Per dimostrazioni parziali del punto **(b)** si assegnino punteggi parziali secondo le seguenti indicazioni:

- **un punto** per chi dichiara 1344 come soluzione;
- **un punto** per chi *dichiara* che per n non multiplo di 3 Federica vince;
- **un punto** per chi imposta la dimostrazione del punto precedente scrivendo $n = 3k + r$;
- **un punto** per chi mostra che Federica può sempre vincere nel caso $r = 1$;
- **un punto** per chi mostra che Federica può sempre vincere nel caso $r = 2$;
- **un punto** per chi *dichiara* che Federica vince solo con n non multiplo di 3;
- **2 punti** per chi *dimostra* il punto precedente, facendo notare che ciascuna delle due mosse manda multipli di 3 in multipli di 3.

Esercizio 16

Si assegnino **15 punti** a una soluzione interamente corretta, anche diversa da quella proposta. Per una soluzione corretta del punto **(a)** si assegnino **9 punti**; per una soluzione corretta del punto **(b)** (anche in assenza della dimostrazione del punto **(a)**) si assegnino **6 punti**.

In caso di soluzioni incomplete, si assegnino punteggi parziali secondo il seguente schema. Per il punto **(a)**:

- **2 punti** per chi esprima la tesi in termini di angoli opposti supplementari;
- **un punto** per chi scriva l'ipotesi in termini della relazione fra angoli $\widehat{BAD} = 2 \cdot \widehat{BAM}$;
- **2 punti** per chi noti che B, C, D giacciono su una circonferenza di centro A;
- **2 punti** per chi noti che sia l'angolo $\widehat{BAD}$ sia l'angolo $\widehat{BCD}$ insistono (seppure da parti opposte) sull'arco BD;
- **2 punti**, non cumulabili con le due indicazioni precedenti, per chi dimostri che $\widehat{BCD} = \widehat{CBA} + \widehat{CDA}$.

Per il punto **(b)**:

- **2 punti** per chi dimostri che $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$;
- **2 punti** per chi usi il fatto che ABC sia isoscele per ottenere $\widehat{AMB} = \widehat{ABC}$;
- **un punto** per chi osservi che i due triangoli ABN e AMB hanno un angolo in comune;
- **un punto** per l'applicazione del criterio di similitudine.

Esercizio 17

Si assegnino **15 punti** ad una soluzione corretta, anche diversa da quella proposta. La dimostrazione del punto **(a)** vale **7 punti**, quella del punto **(b)** vale **8 punti**.

In caso di soluzioni incomplete si assegnino punteggi parziali secondo le seguenti indicazioni. Per il punto **(a)**:

- **un punto** per chi scrive anche solo una delle due disuguaglianze $d_3 \leq \sqrt{n}$, $\sqrt{n} \leq d_4$;
- **3 punti** per la dimostrazione delle disuguaglianze $d_3 < \sqrt{n} < d_4$ (si assegni comunque **un punto** per la dimostrazione di almeno una delle due disuguaglianze $d_3 \leq \sqrt{n}$, $\sqrt{n} \leq d_4$);
- **2 punti** a chi osserva che se d è un divisore di n, allora anche n/d lo è;
- **un punto** a chi conclude che $k = 6$.

Si assegni comunque **un punto** a chi afferma (senza dimostrazione) che $k = 6$, e si assegni inoltre **un punto**, non cumulabile con i punti ottenuti alla seconda voce dell'elenco precedente, per chi osserva (anche senza dimostrazione) che n non è un quadrato perfetto.

Per il punto **(b)**:

- **un punto** per chi trova le due soluzioni;
- **un punto** per chi dimostra che $n = d_3 d_4$;
- **2 punti** per chi ottiene l'espressione $n = d_3(d_3 + 1)$;
- **2 punti**, alternativi ai precedenti, per chi dimostri che i divisori di n si possono scrivere come $1, 2, d_3, n/d_3, n/2, n$ (si assegni comunque **un punto** a chi osserva che n è pari, senza utilizzare questa affermazione per dedurre che $d_2 = 2$);
- **4 punti** per chi conclude correttamente. Si assegnino **2 punti** per osservazioni pertinenti, anche non dimostrate, sulla struttura dei divisori di n maggiori di due (per esempio a chi dice che tali divisori non possono essere altro che numeri primi o potenze di 4). Si assegnino questi 2 punti anche in assenza dell'espressione $n = d_3(d_3 + 1)$.