

La Geometria Preassoluta

Una rivoluzione euclidea delle geometrie non-euclidee

F. Rupeni, A. Zampa

Udine, 18 aprile 2013

Cosa dice il Quinto Postulato di Euclide?

- ❑ «Per ogni punto P esterno a qualunque retta r passa una e una sola retta p parallela a r .»
(Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899)
- ❑ «Per ogni punto P esterno a una qualunque retta r non possono essere condotte due parallele a r .»
(Playfair, *Elements of geometry*, 1795)
- ❑ «SE le rette r e s sono parallele e la retta t interseca r ALLORA t interseca anche s .»
(Proclo, *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, V sec. d.C.)
- ❑ «SE le rette r e s tagliate dalla trasversale t formano angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto ALLORA si intersecano dalla parte di tali angoli.»
(Euclide, *Elementi* – Libro I, ca. 300 a.C.)

Quanta confusione!

Sia stato richiesto

I. di condurre una linea retta **da** ogni punto **a** ogni punto.

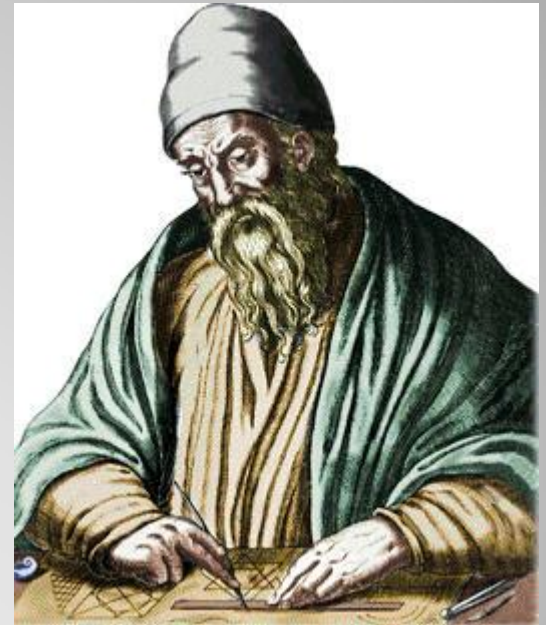
Il postulato non afferma che tale retta è unica!

Euclide lo usa in tale accezione.

MA

Geometria sferica: astronomia e geografia matematica.

(Teodosio II-I a.C., Menelao I d.C., Tolomeo II d.C.)



I primi 4 postulati di Euclide

Sia stato richiesto

II. di prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in <linea> retta.

Il postulato richiede che la retta sia **illimitata**, cioè senza termine, non che sia **infinita** contrariamente all'uso che ne fa Euclide.

«Quando si estendono le costruzioni spaziali all'incommensurabilmente grande, **bisogna distinguere l'illimitato dall'infinito** [...] Che lo spazio sia una varietà illimitata triestesa, è un presupposto che trova applicazione in ogni concezione del mondo esterno [...] Da qui non consegue affatto però l'infinitezza; piuttosto se [...] gli si ascrive una misura di curvatura costante, lo spazio sarebbe necessariamente finito, non appena questa misura di curvatura avesse sia pure il più piccolo valore positivo. [...] Prolungando [...] le direzioni iniziali di un elemento di superficie si otterrebbe [...] la forma di una superficie sferica e dunque finita.»

Bernhard Riemann (Gottinga, 10 giugno 1854)

I primi 4 postulati di Euclide

Sia stato richiesto

III. che con ogni centro e intervallo sia tracciato un cerchio.

Con la riga (POSTULATI I e II) ed il compasso (III) Euclide costruisce un altro *strumento* (I.1), il *triangolo equilatero*, utile per bisecare i segmenti (I.10), per trasportare i segmenti (I.2), per bisecare gli angoli (I.9), per trasportare gli angoli (I.23), ...

Già con il primo uso di questo postulato (I.1) si evidenziano *assunzioni implicite* di Euclide (intersezione tra circonferenze e tra rette e circonferenze).

I primi 4 postulati di Euclide

Sia stato richiesto

IV. che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

Sebbene alla *definizione* 10 dei *termini* si legga

«E quando una retta che sta su una retta faccia gli angoli consecutivi uguali tra loro, uno e l'altro degli angoli uguali è retto»

l'uguaglianza di due angoli retti adiacenti non implica quella tra due angoli retti non adiacenti.

Euclide insiste sul fatto che una proposizione intuitiva non è di per sé automaticamente vera.

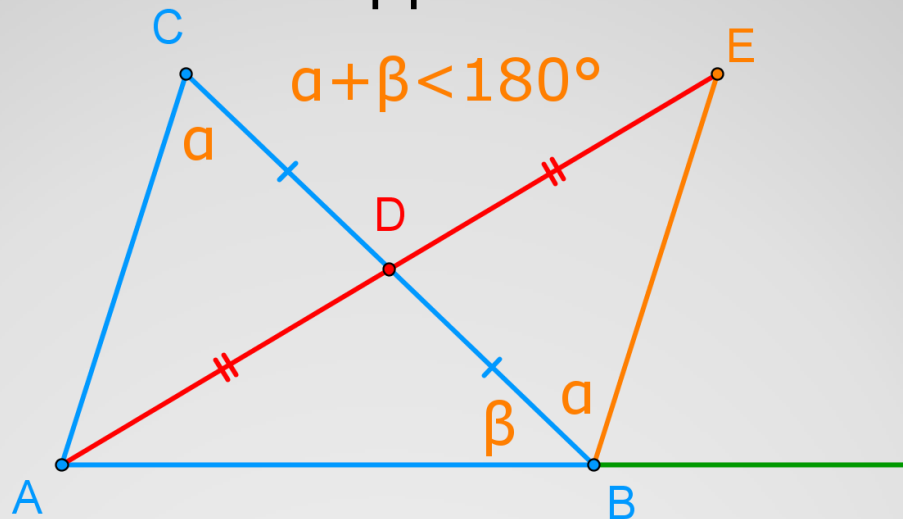
Nozioni comuni (*assiomi*)

I primi 4 postulati di Euclide

Un punto strategico

PROPOSIZIONE 16 (primo teorema dell'angolo esterno)

Prolungato avanti uno solo dei lati di ogni triangolo, l'angolo all'esterno è maggiore di uno e dell'altro degli angoli all'interno e opposti.

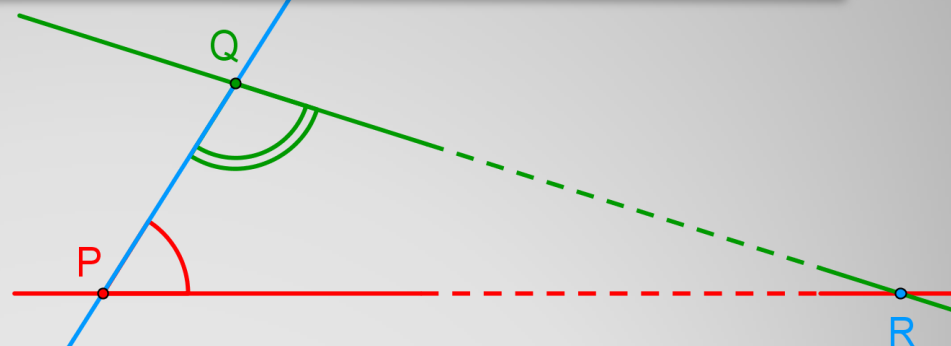


I primi 4 postulati di Euclide

Nella Geometria Assoluta (I, II, III, IV)

POSTULATO V: «SE le **rette** r e s tagliate dalla **retta** trasversale t formano angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto **ALLORA** le due **rette** prolungate illimitatamente si incontrano **dalla** parte di tali angoli.»

Inutile!!!
(PROPOSIZIONE 17)



Non è dimostrabile nella geometria assoluta!

Il quinto postulato di Euclide

Nella geometria di Riemann

POSTULATO V: «SE le **rette** r e s tagliate dalla **retta** trasversale t formano angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto **ALLORA** le due **rette** prolungate illimitatamente si incontrano dalla parte di tali angoli»

È dimostrabile nella geometria di Riemann!

Assioma ellittico (o «di Riemann»):
«Tutte le rette si incontrano.»

Il quinto postulato di euclide

Come stabilire il suo valore di verità?

Un termine: **RETTA**

Due significati: **RETTA APERTA**
RETTA CHIUSA

Una **dimostrazione** del suo valore di verità è possibile solo in un **contesto unitario** nel quale al termine **retta** corrisponda un **unico significato**.

Il quinto postulato di Euclide

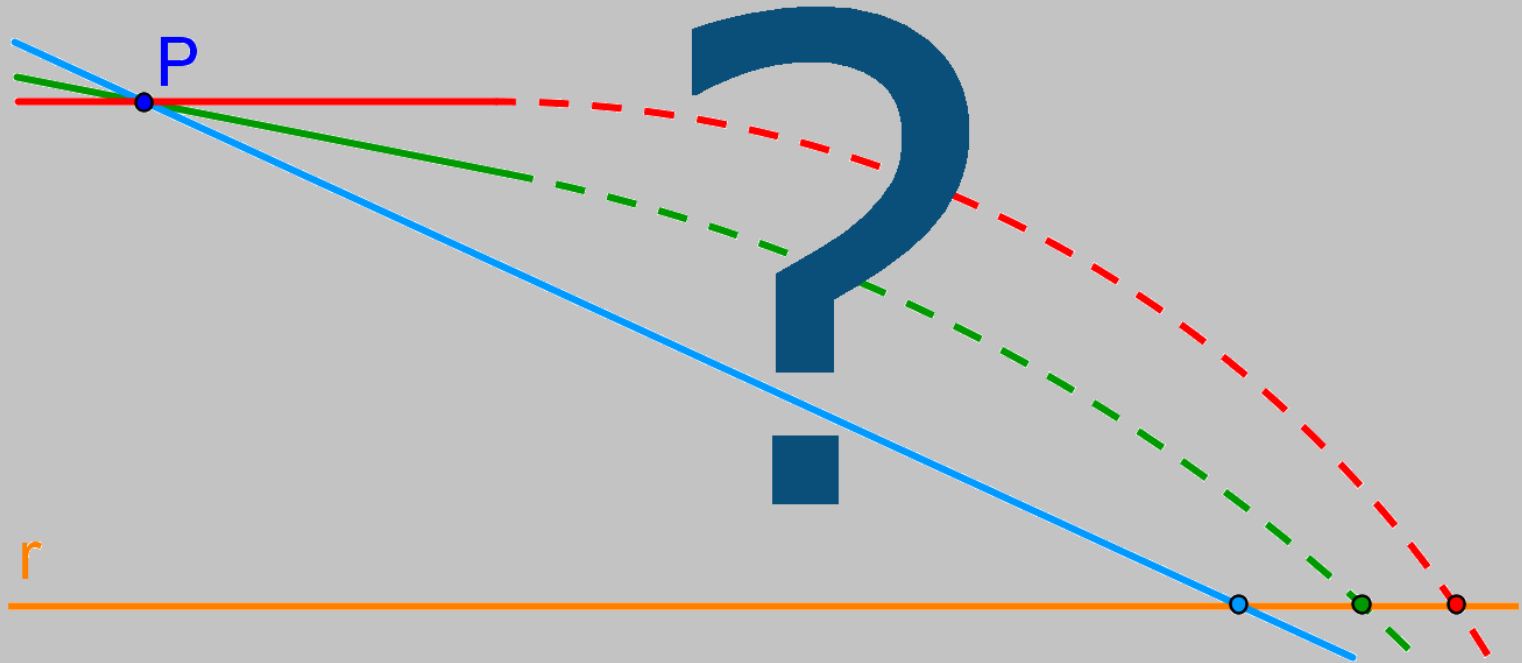
Il dubbio di Aristotele

Secondo il celebre allievo dell'accademia platonica (sul cui portale, secondo la leggenda, compariva l'epigrafe «Non entri chi ignora la geometria»)

«Quando si cerca di dimostrare tramite se stesso ciò che non è conosciuto di per se stesso, questo è petizione di principio [...]. È ciò che fanno coloro che intendono tracciare le parallele: sfugge loro che stanno essi stessi assumendo ciò che non è possibile dimostrare non essendoci parallele.»

Il problema delle parallele

Il dubbio di Aristotele



Il problema delle parallele

Definizione 23 (ultima degli *Elementi*)

«Parallele sono rette che, essendo nello stesso piano e prolungate illimitatamente da una e dall'altra parte, né da una né dall'altra si incontrano tra loro.»

Simbologia: $x \P y$

Secondo Euclide una retta non è parallela a se stessa.

$$x=y \rightarrow \neg x \P y$$

$$x \P y \rightarrow x \neq y$$

La soluzione di Euclide

Implicazioni tra due enunciati A, B

Implicazione	Simbolo	Significato
Diretta	$A \rightarrow B$	<i>se A allora B</i>
Inversa	$B \rightarrow A$	<i>se B allora A</i>
Controinversa	$\text{NON-}B \rightarrow \text{NON-}A$	<i>se $\text{NON-}B$ allora $\text{NON-}A$</i>

Le implicazioni **diretta** e **controinversa** sono *logicamente equivalenti*: infatti, $A \rightarrow B$ significa che è impossibile che A sia vero e B sia falso, mentre $\text{NON-}B \rightarrow \text{NON-}A$ significa che è impossibile che $\text{NON-}B$ sia vero e $\text{NON-}A$ sia falso.

Dopo l'implicazione **diretta** Euclide cerca sempre di dimostrare quella **inversa**.

La soluzione di Euclide

Implicazioni tra due enunciati A, B

Un esempio emblematico è il **teorema di Pitagora**:

PROPOSIZIONE 47

Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che comprendono l'angolo retto.

PROPOSIZIONE 48

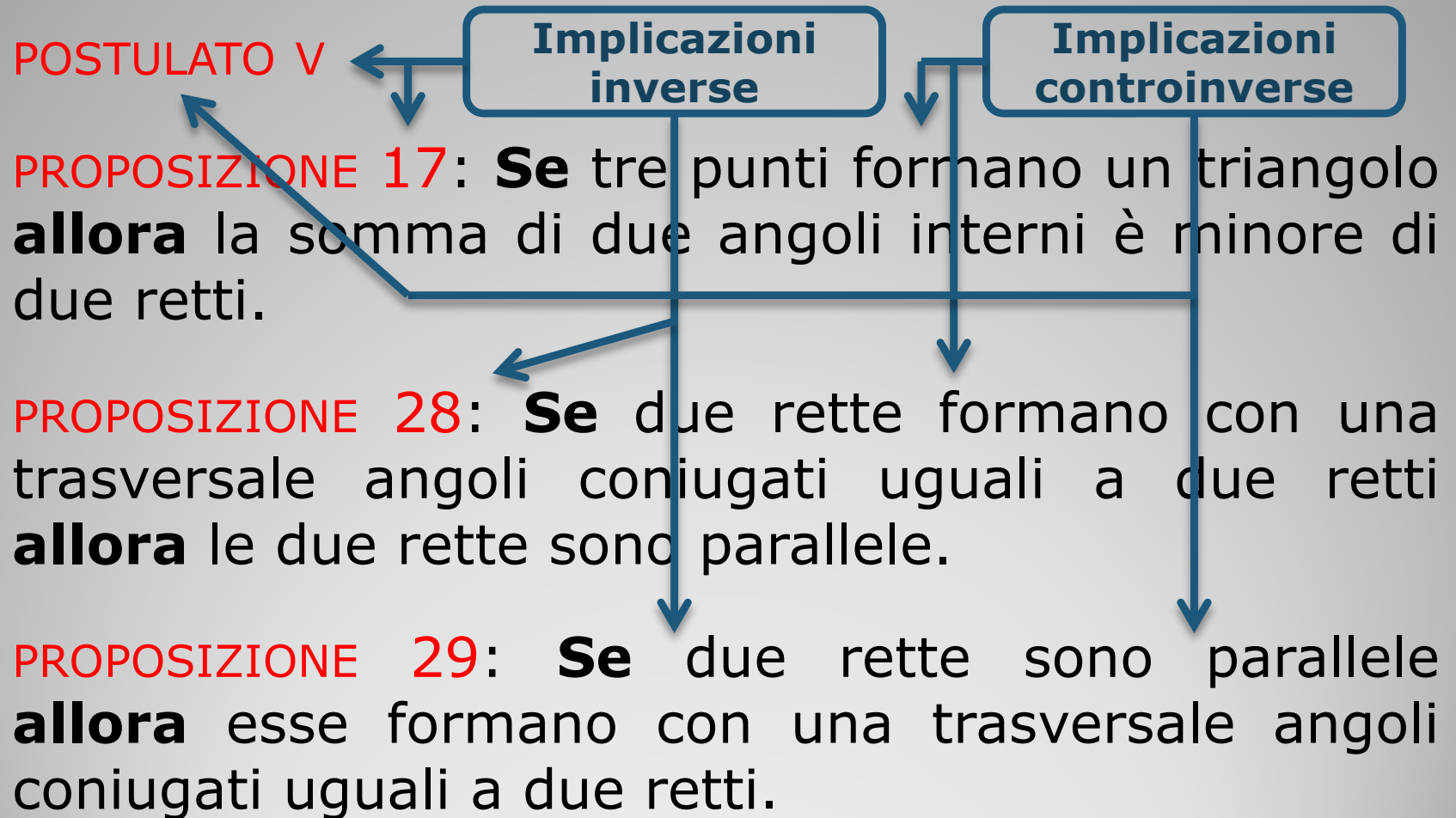
Qualora il quadrato su uno solo dei lati di un triangolo sia uguale ai quadrati dei restanti due lati del triangolo, l'angolo compreso dai restanti due lati del triangolo è retto.

Le implicazioni sono: $NON-B \Rightarrow NON-A$ e $NON-A \Rightarrow NON-B$.

Dopo l'implicazione **diretta** Euclide cerca sempre di dimostrare quella **inversa**.

La soluzione di Euclide

Libro I degli *Elementi* di Euclide



La soluzione di Euclide

Esistenza & della parallela ($n \geq 1$)

PROPOSIZIONE 23

Costruire, sulla retta data e su un punto su di essa, un angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato.

PROPOSIZIONE 27

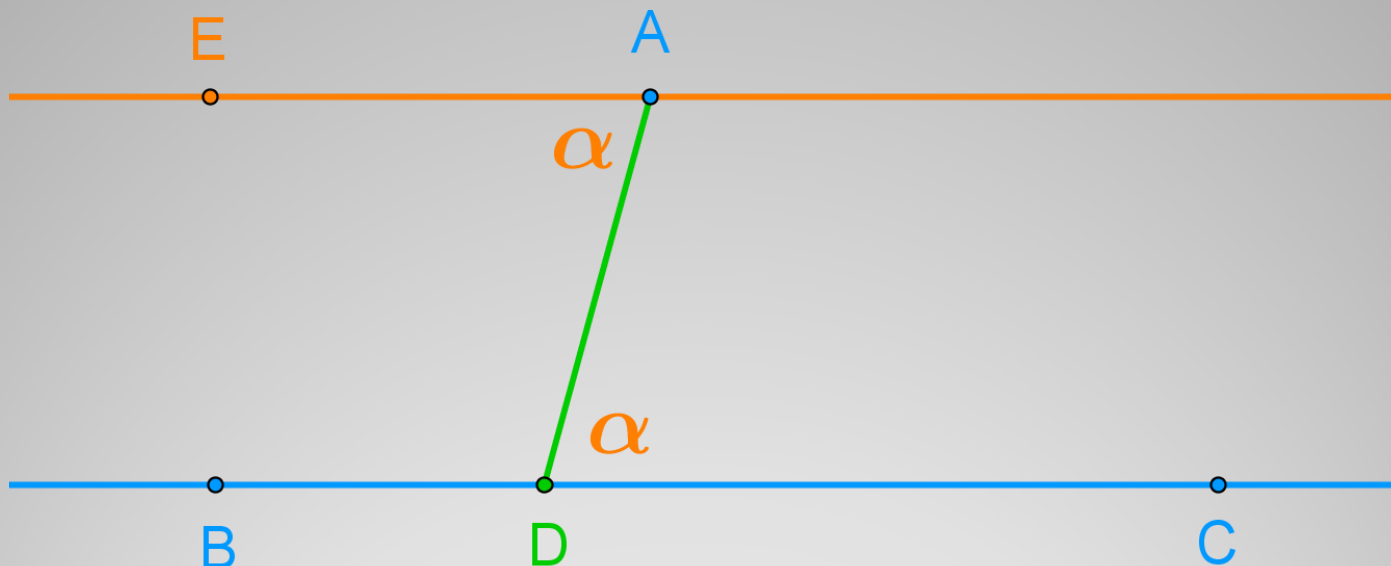
Qualora una retta che incide su due rette faccia **gli angoli alterni uguali tra loro**, le rette saranno **parallele**.

PROPOSIZIONE 31

Condurre per il punto dato parallela alla retta data una linea retta.

La soluzione di Euclide

Esistenza ε della parallela ($n \geq 1$)



PROPOSIZIONE 31

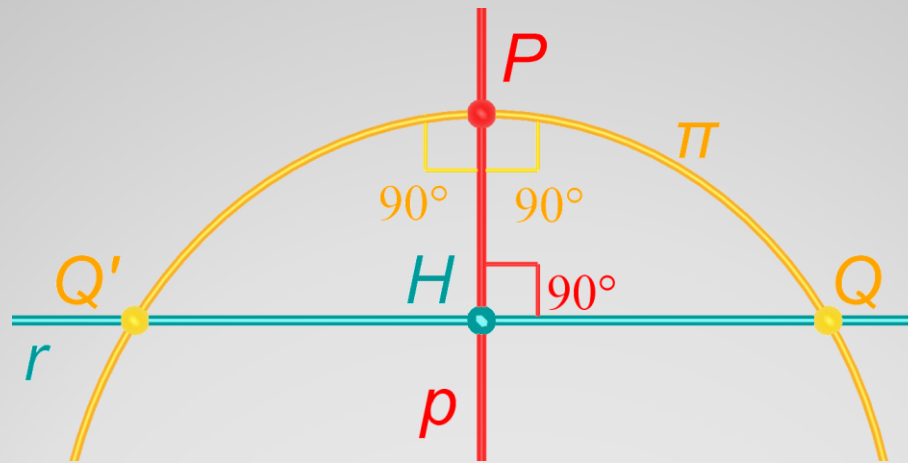
Condurre per il punto dato parallela alla retta data una linea retta.

La soluzione di Euclide

Esistenza ε della parallela ($N \geq 1$)

Teorema di esistenza (PROPOSIZIONE 31)

Per un punto P esterno a una retta r passa (almeno) una retta parallela a r .



POSTULATO II $\rightarrow$ ESISTENZA

RETTA APERTA

La soluzione di Euclide

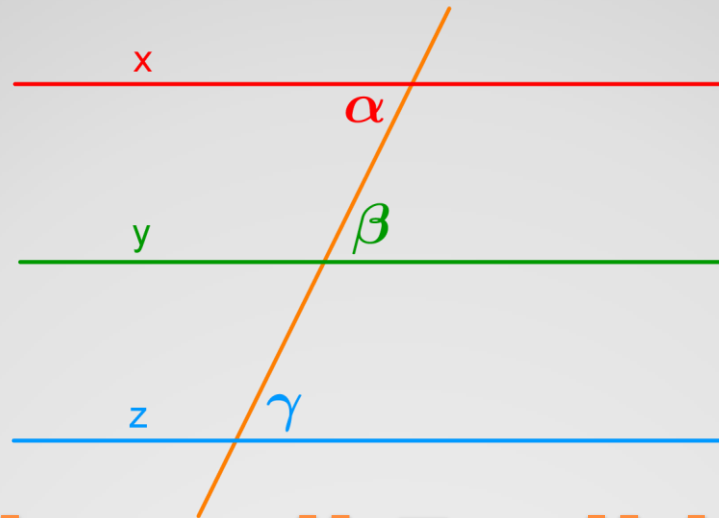
*Dimostrata senza l'uso
del POSTULATO viii!*

Unicità $\mathcal{U}$ della parallela ($N \leq 1$)

PROPOSIZIONI 28 e 29 $\rightarrow$ **PROPOSIZIONE 30:**

Se due rette sono parallele ad una terza **allora** le due rette sono parallele tra loro.

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow ((x \wp z \wedge y \wp z) \rightarrow (x \wp y)))$$



La soluzione di Euclide

Unicità $\mathcal{U}$ della parallela ($n \leq 1$)

PROPOSIZIONI 28 e 29 $\rightarrow$ **PROPOSIZIONE 30:**

Se due rette sono parallele ad una terza **allora** le due rette sono parallele tra loro.

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow ((x \parallel z \wedge y \parallel z) \rightarrow (x \parallel y)))$$

Unicità della parallela: **Se** due rette passanti per un punto sono parallele a una terza **allora** esse coincidono.

$$\forall x \forall y \forall z ((\neg x \parallel y \wedge (x \parallel z \wedge y \parallel z)) \rightarrow x = y)$$

La soluzione di Euclide

Esistenza $\mathcal{E}$ e unicità $\mathcal{U}$

Negli *Elementi* l'esistenza $\mathcal{E}$ è un teorema della geometria assoluta e l'unicità $\mathcal{U}$ una conseguenza del (**equivalente al**) POSTULATO V.

$\mathcal{E} \wedge \mathcal{U} (\Leftrightarrow N \geq 1 \wedge N \leq 1 \Leftrightarrow N = 1)$ è un teorema – mai formulato da Euclide! – della geometria euclidea.

La trattazione separata di $\mathcal{E}$ e $\mathcal{U}$ negli *Elementi* ne intuisce l'indipendenza, confermata dalla scoperta delle geometrie **iperbolica** ed **ellittica**.

$\mathcal{E} \wedge \neg \mathcal{U} (\Leftrightarrow N \geq 1 \wedge \neg(N \leq 1) \Leftrightarrow N > 1)$ **assioma di Lobačevskij**

$\neg \mathcal{E} \wedge \mathcal{U} (\Leftrightarrow \neg(N \geq 1) \wedge N \leq 1 \Leftrightarrow N = 0)$ **assioma di Riemann**

La soluzione di Euclide

Un nuovo paradigma

[...] al tempo di Aristotele non sembra che fosse chiaramente distinto il problema dell'«*esistenza della parallela*», dimostrabile indipendentemente dal quinto postulato, e quello della sua «*unicità*» equivalente al quinto postulato. [...]

Ed è proprio questa la questione che a partire dal primo secolo a.C. fino all'inizio del XIX secolo, costituirà il più grande enigma scientifico della storia, oltre che un apparente «*scandalo*» della ragione.

R. Migliorato

La soluzione di Euclide

Geometria		Tipologia delle rette N° parallele
Assoluta	Euclidea	Rette illimitate / aperte 1
	Iperbolica	Rette illimitate / aperte ∞ (2)
Ellittica	Semplice	Rette limitate / chiuse 0
	Doppia	

Le geometrie non-euclidee

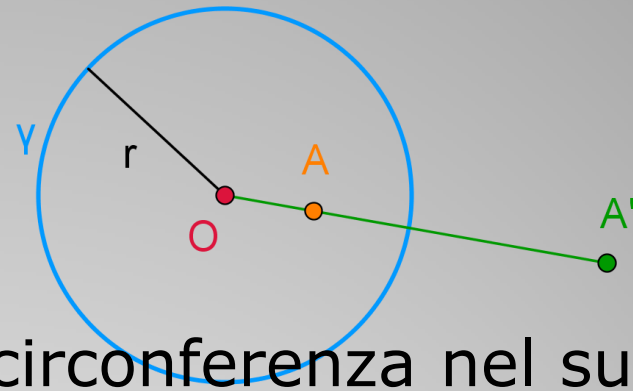
I modelli

Esempi *euclidei* di geometrie non-euclidee

- $OA \cdot OA' = r^2$

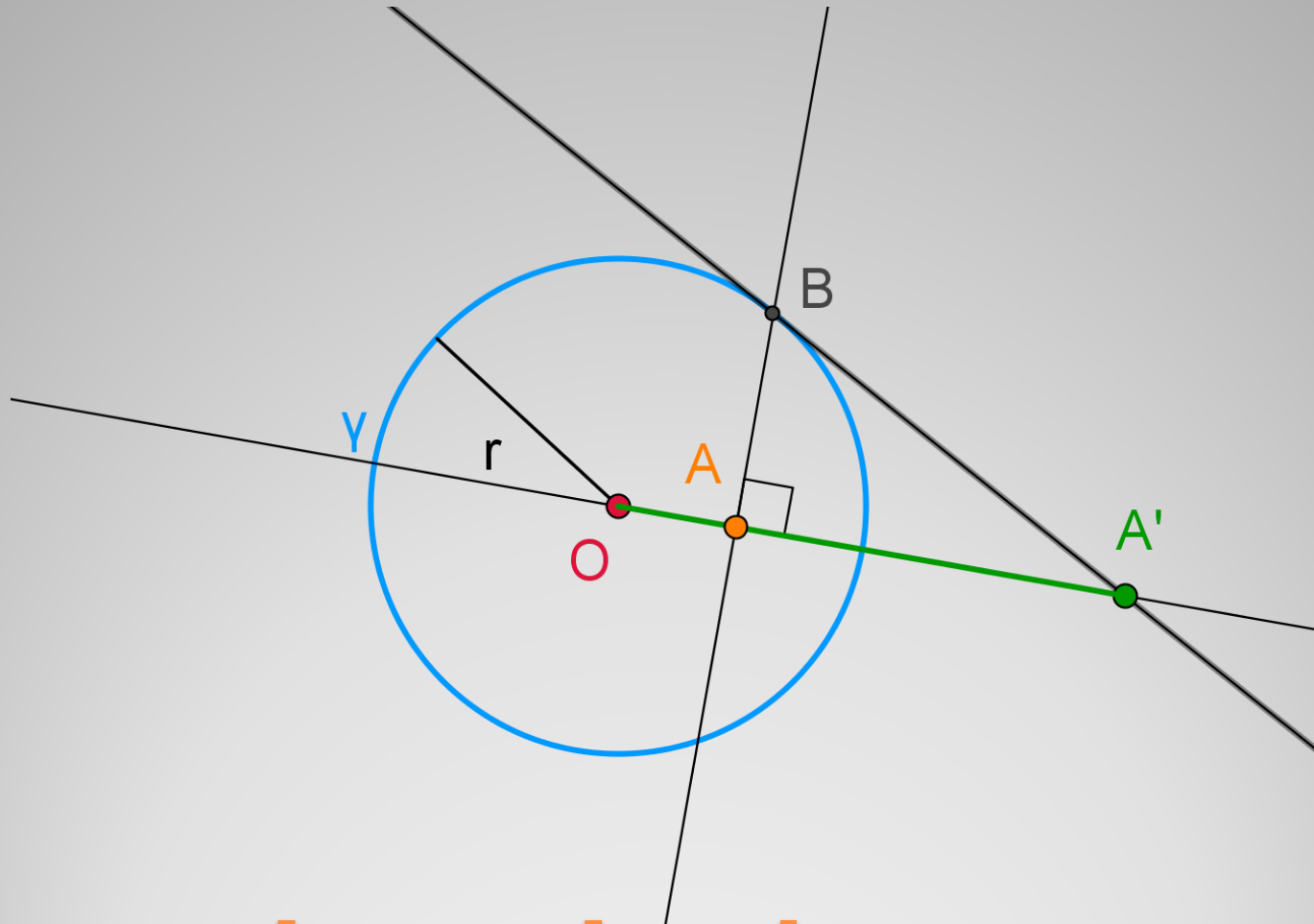
Proprietà:

- È involutiva
- Trasforma l'interno della circonferenza nel suo esterno
- Invarianti: la circonferenza γ , le rette per il centro, le circonferenze perpendicolari a γ
- Trasforma le rette non passanti per il centro in circonferenze passanti per il centro
- Trasforma circonferenze non passanti per il centro in circonferenze non passanti per il centro
- Conserva gli angoli e il birapporto



Preludio - Inversione circolare

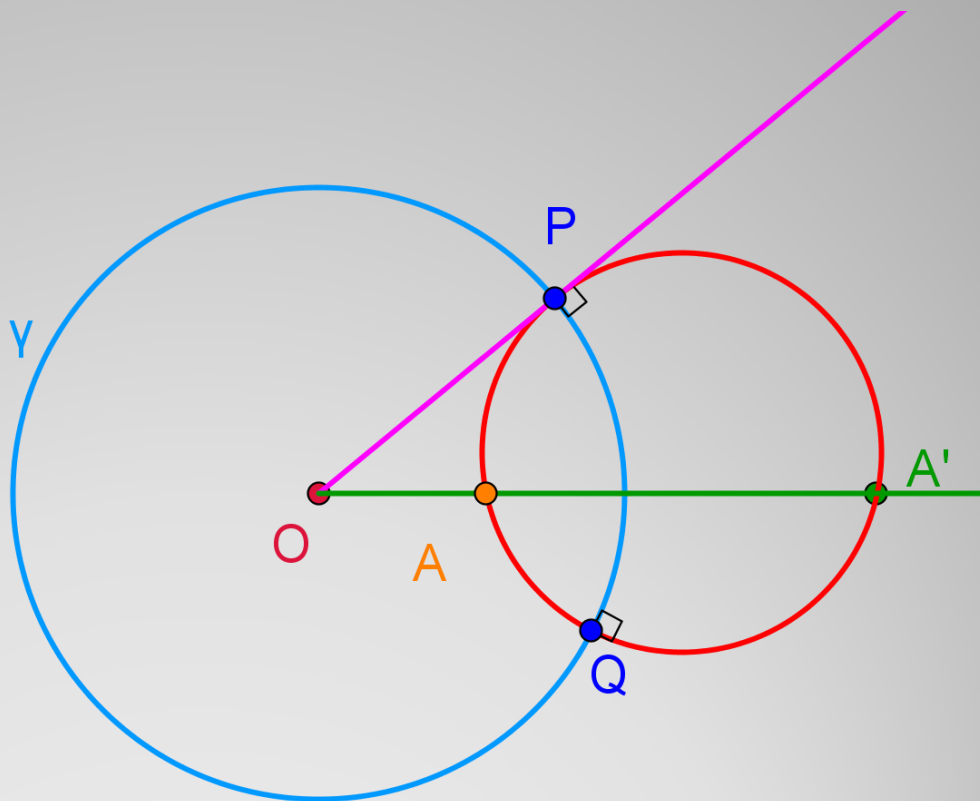
Costruzione



L'inversione circolare

Lascia invarianti le circonferenze perpendicolari a γ

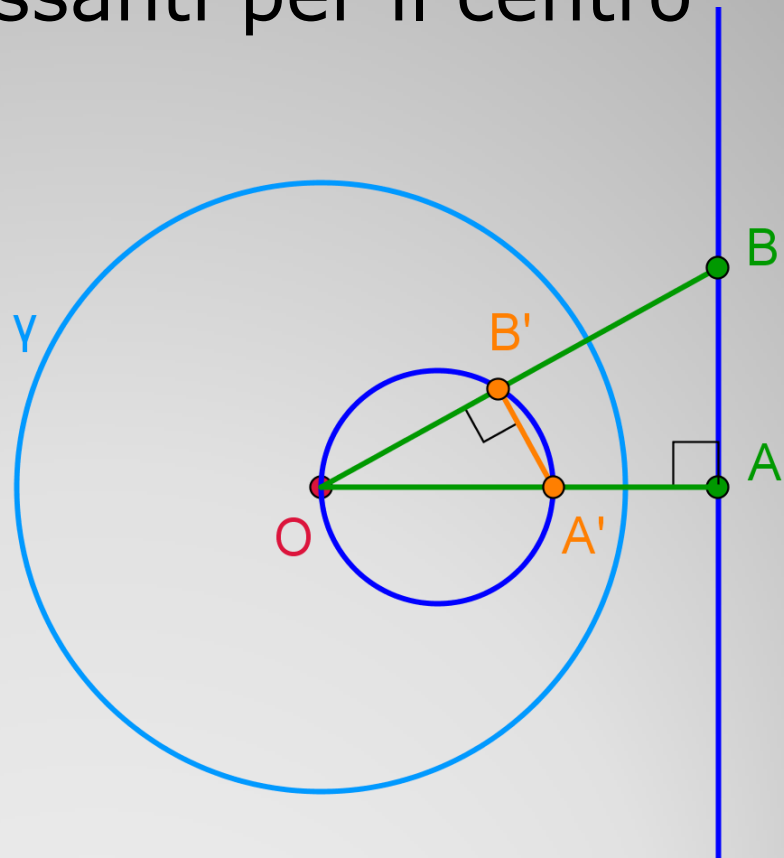
$$OP^2 = OA \cdot OA'$$



L'inversione circolare

Trasforma le rette non passanti per il centro
in circonferenze passanti per il centro

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OA}{OB}$$



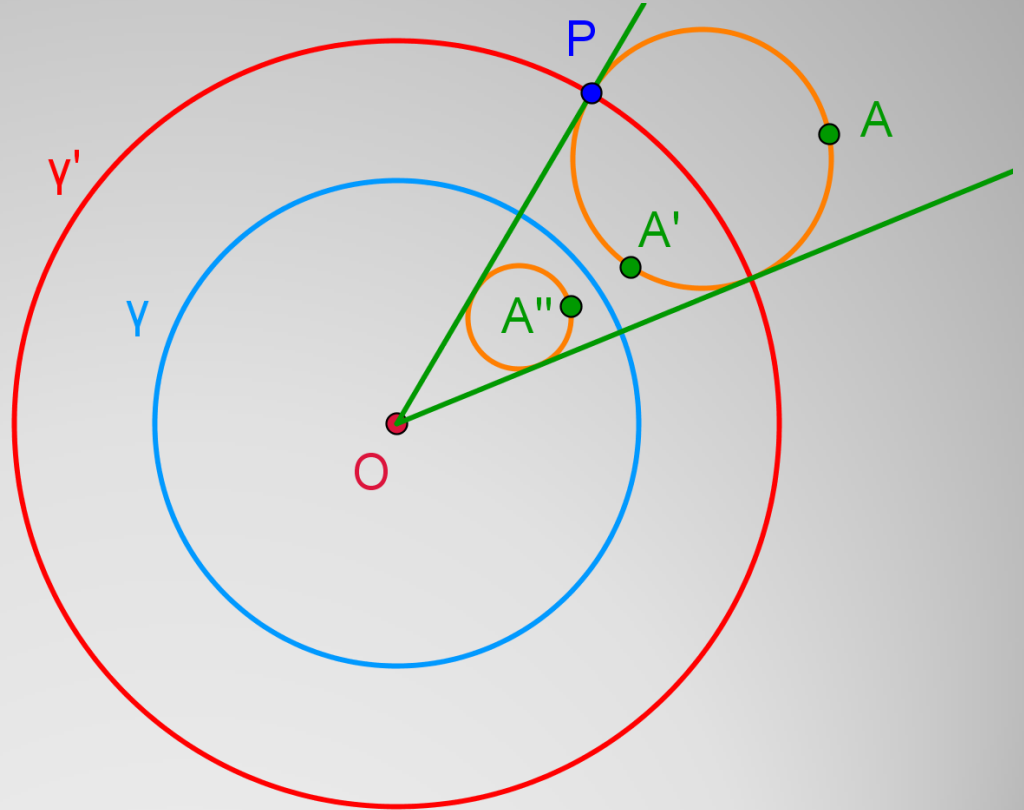
L'inversione circolare

Trasforma circonferenze non passanti per il centro in circonferenze non passanti per il centro

$$OA \cdot OA' = r'^2$$

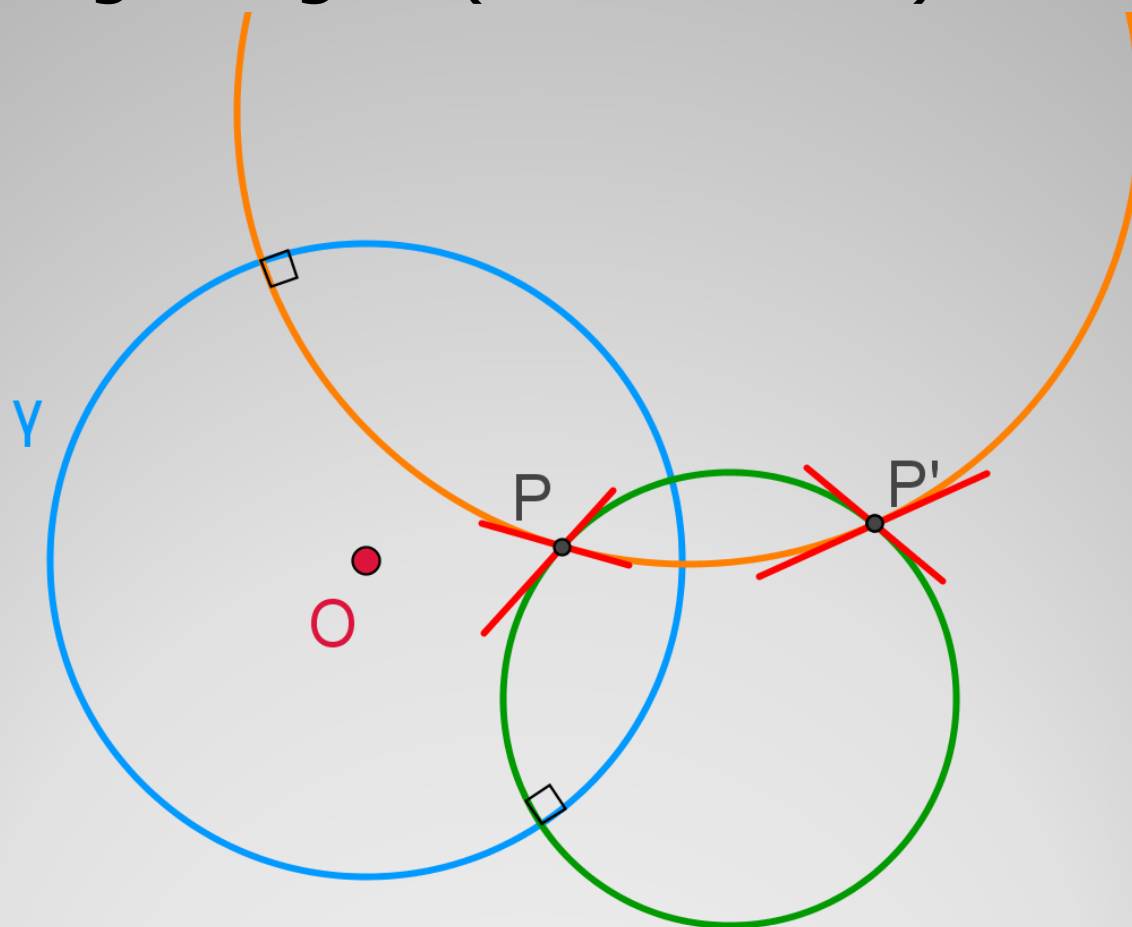
$$OA' \cdot OA'' = r^2$$

$$\frac{OA''}{OA} = k = \frac{r^2}{r'^2}$$



L'inversione circolare

Conserva gli angoli (è **conforme**)



L'inversione circolare

Conserva il birapporto $(AB, PQ) = \frac{AP}{AQ} : \frac{BP}{BQ}$

$$OA \cdot OA' = r^2 = OP \cdot OP' \rightarrow \frac{OA}{OP} = \frac{OP'}{OA'}$$

1. O, A e P non sono allineati

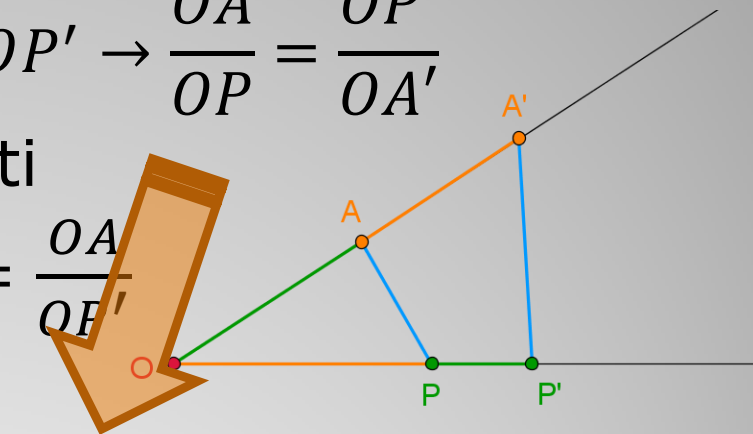
◦ $OAP \sim OP'A'$ quindi $\frac{AP}{A'P'} = \frac{OA}{OP'}$

2. O, A e P sono allineati

◦ $AP = OP - OA \wedge A'P' = OA' - OP' \rightarrow \frac{AP}{A'P'} = \frac{OA}{OP'}$

$$\frac{AQ}{A'Q'} = \frac{OA}{OP'} \rightarrow \frac{AP}{A'P'} : \frac{AQ}{A'Q'} = \frac{OP'}{OP'}$$

$$\text{analogamente } \frac{BP}{B'P'} : \frac{BQ}{B'Q'} = \frac{OP'}{OP'}$$



$$\left. \begin{array}{l} \frac{AP}{A'P'} : \frac{AQ}{A'Q'} = \frac{OP'}{OP'} \\ \frac{BP}{B'P'} : \frac{BQ}{B'Q'} = \frac{OP'}{OP'} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{AP}{A'P'} : \frac{AQ}{A'Q'} = \frac{BP}{B'P'} : \frac{BQ}{B'Q'}$$

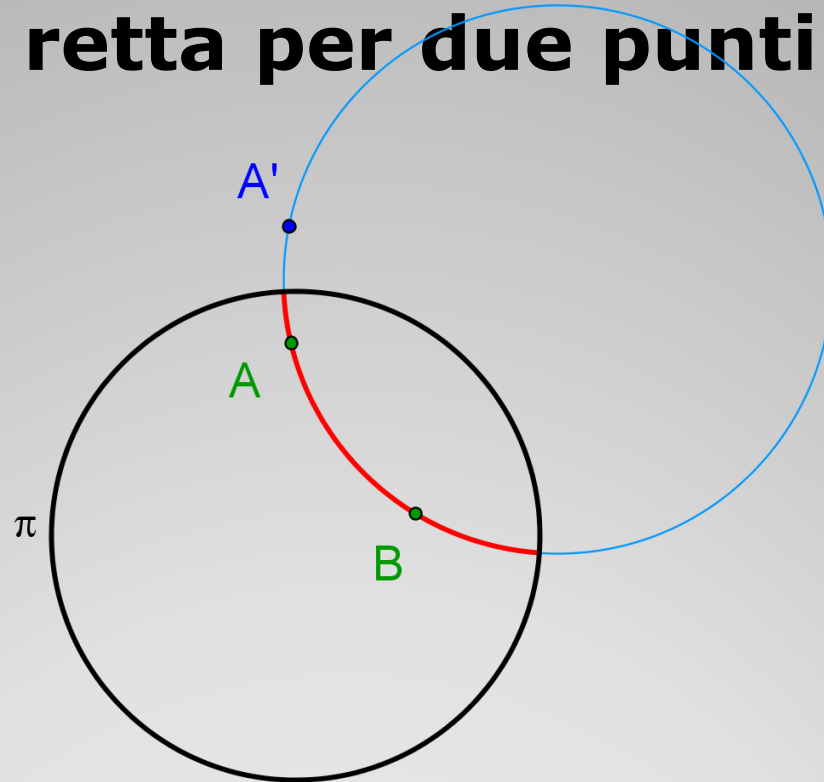
L'inversione circolare

La geometria iperbolica

- *Piano* = interno di un cerchio euclideo
- *Punto* = punto euclideo interno al cerchio
- *Retta* = diametro o arco di circonferenza perpendicolare al bordo

Il modello di Poincaré

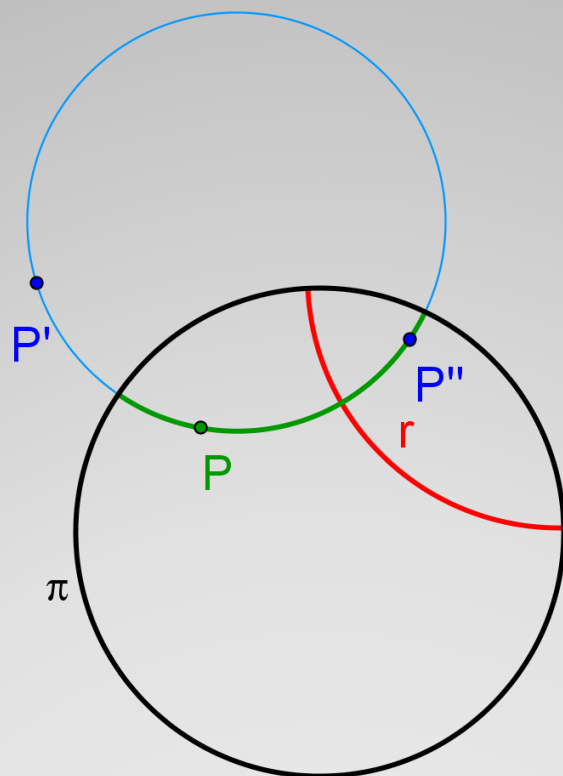
La retta per due punti



A' è l'inverso di A rispetto alla circonferenza π
«bordo all'infinito» del piano

Il modello di Poincaré

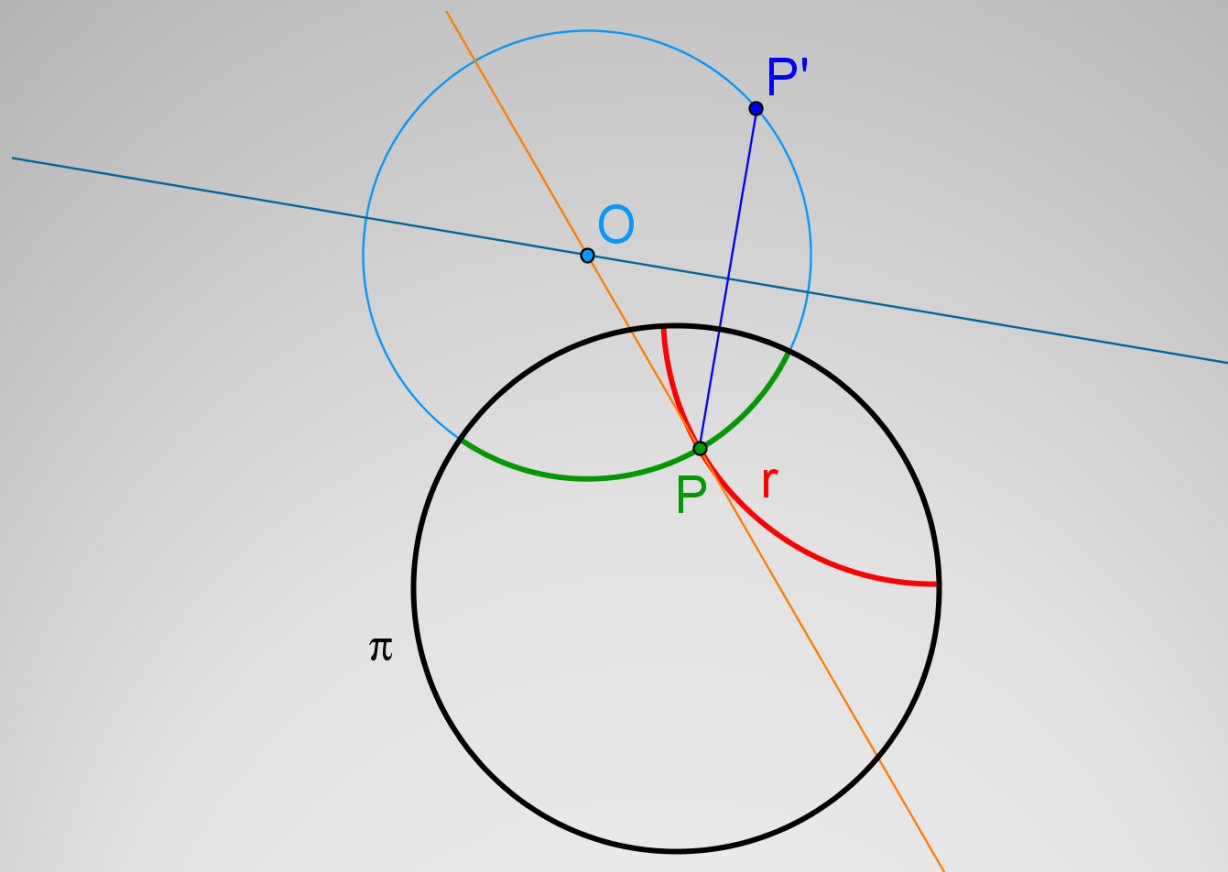
La perpendicolare da un punto esterno



E se r è un diametro?

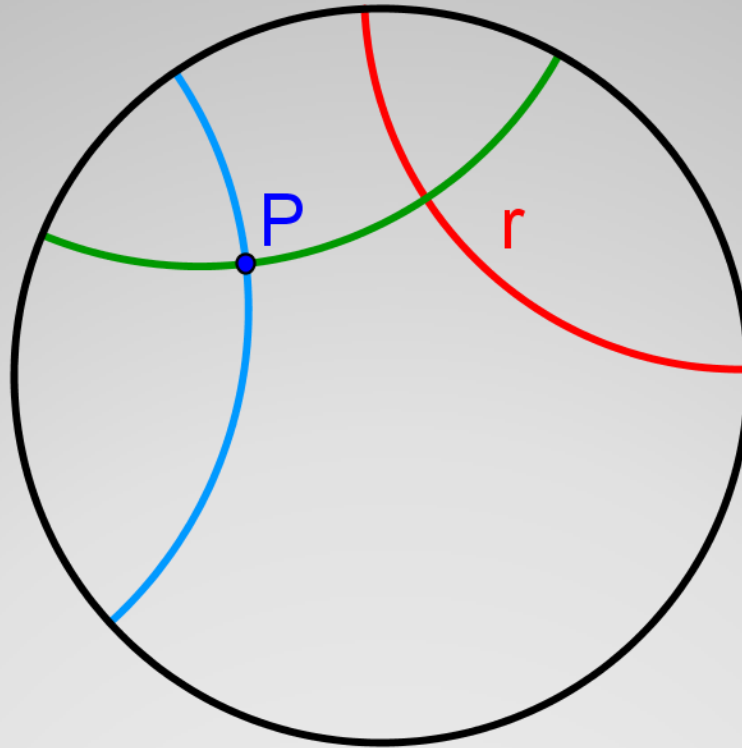
Il modello di Poincaré

La perpendicolare da un punto interno



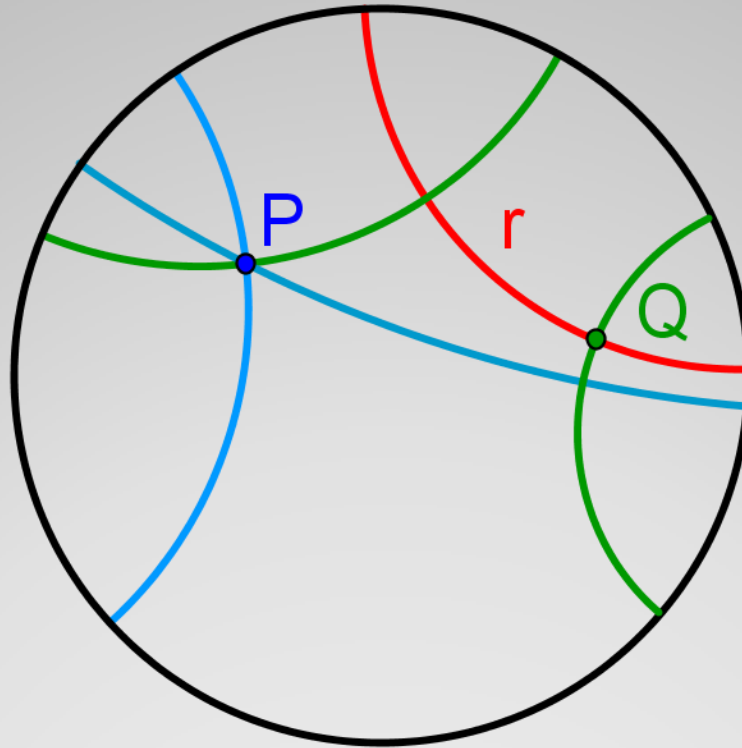
Il modello di Poincaré

La parallela di Euclide



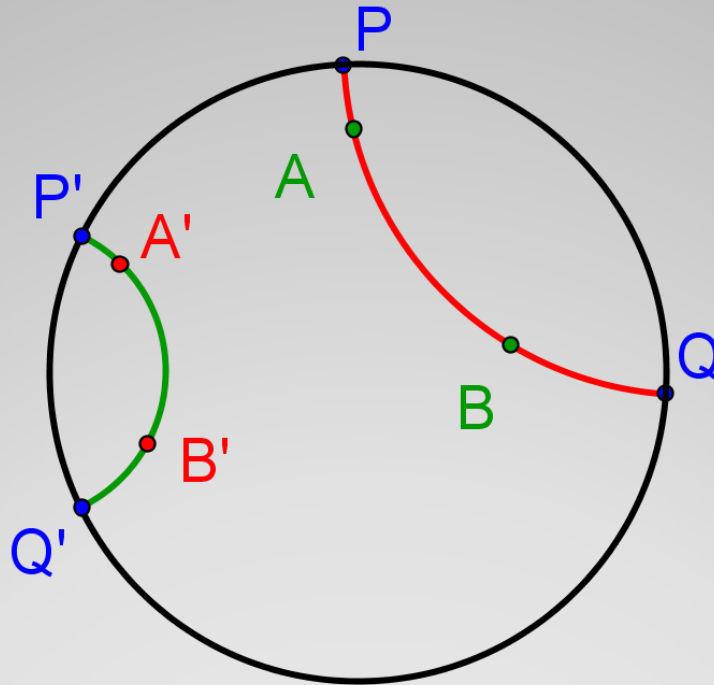
Il modello di Poincaré

Altre parallele



Il modello di Poincaré

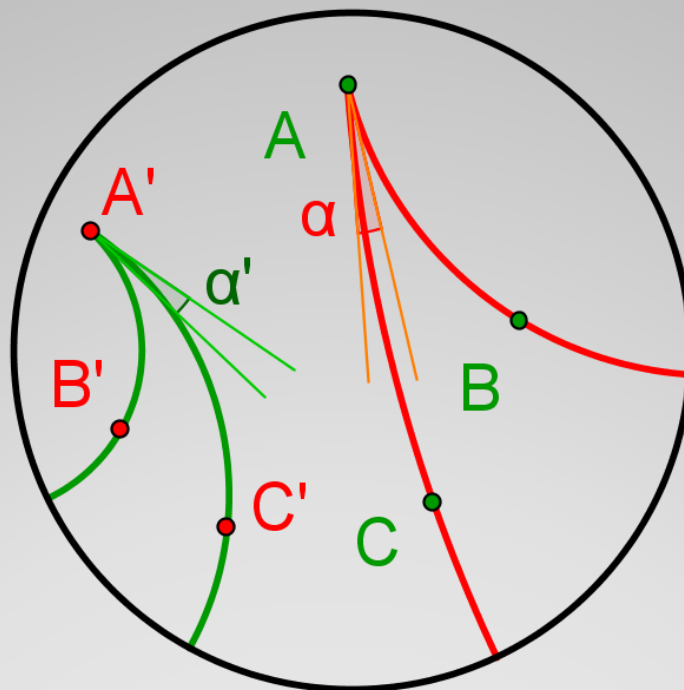
La congruenza dei segmenti



$$AB \cong A'B' \Leftrightarrow (AB, PQ) = (A'B', P'Q')$$

Il modello di Poincaré

La congruenza degli angoli

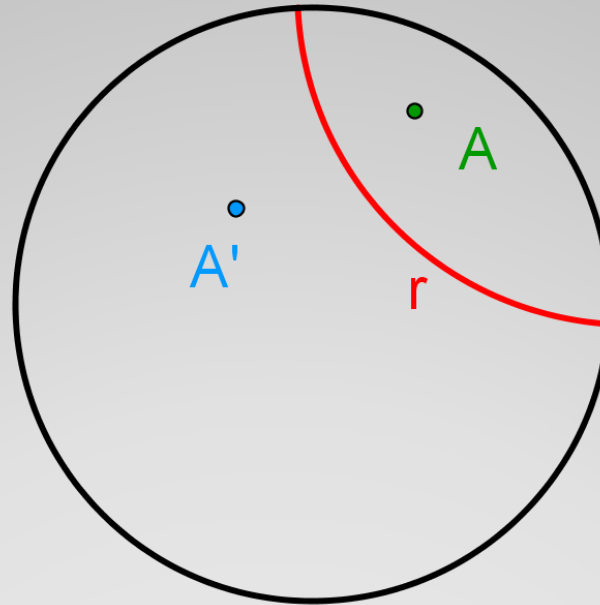


$$B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C' \Leftrightarrow \alpha \cong \alpha'$$

Il modello di Poincaré

Le simmetrie assiali

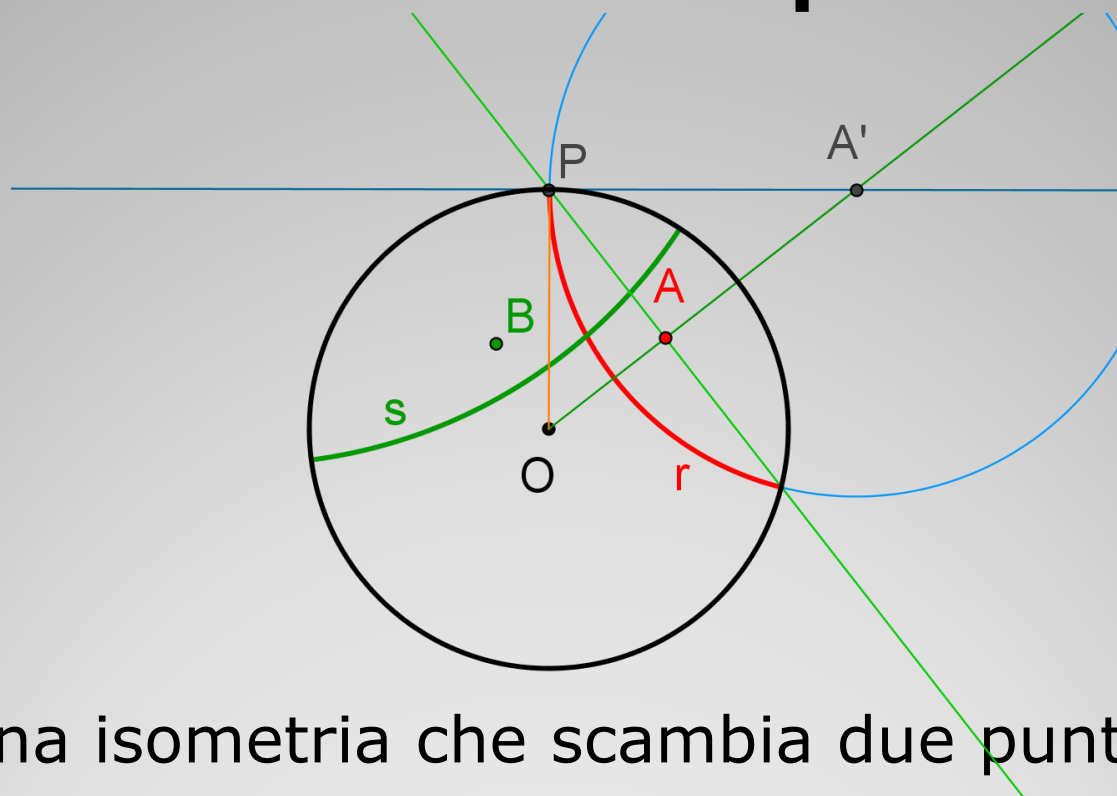
(inversione circolare)



$$A' = S_r(A)$$

Il modello di Poincaré

Transitività sui punti

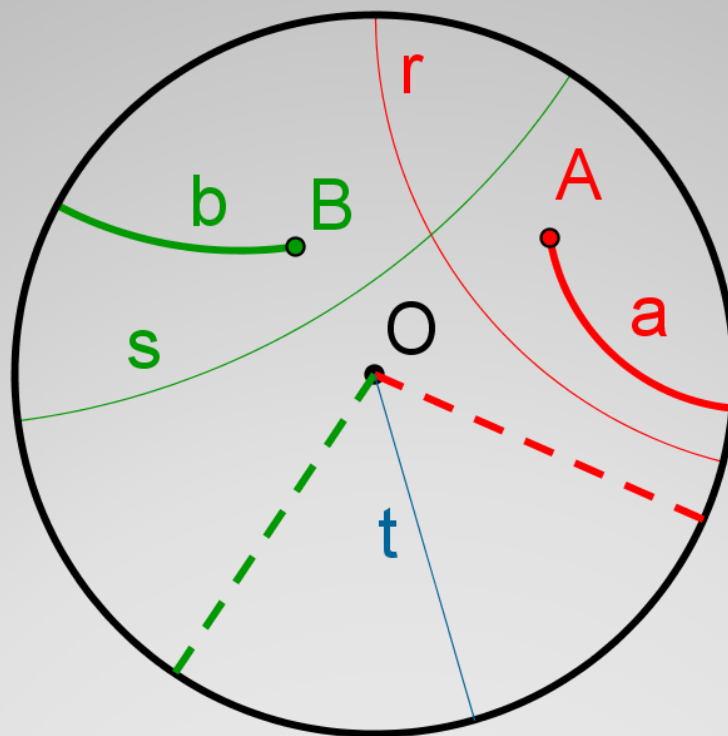


Esiste una isometria che scambia due punti dati arbitrari

$$A = S_r(O) \wedge B = S_s(O) \rightarrow B = S_s \circ S_r(A)$$

Il modello di Poincaré

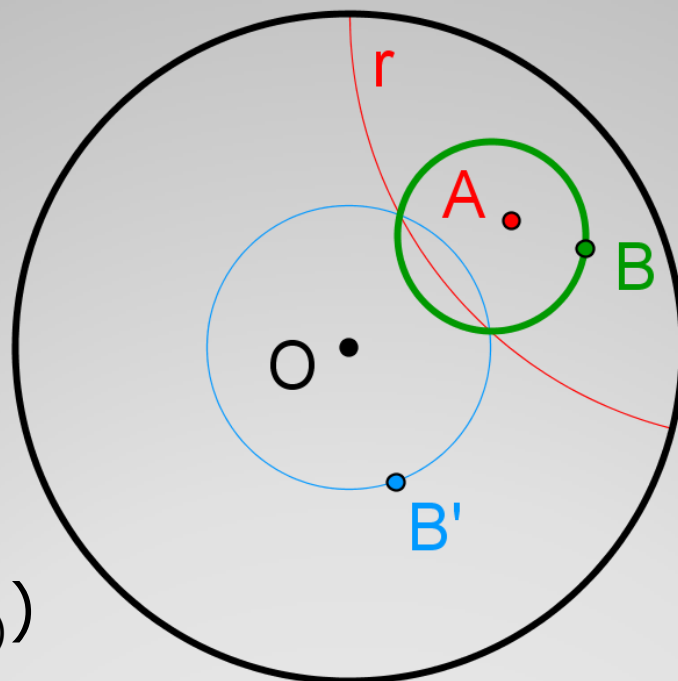
Transitività sulle semirette



$$b = S_s \circ S_t \circ S_r(a)$$

Il modello di Poincaré

Le circonferenze iperboliche



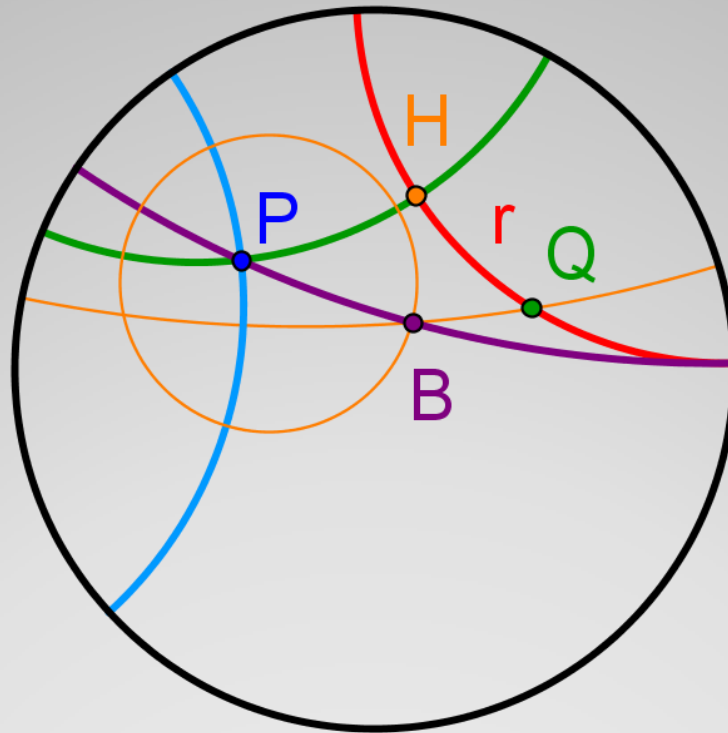
$$C_{A,B} = S_r(C_{O,S_r(B)})$$

Sono circonferenze euclidee ma con centro diverso

Costruire una circonferenza dati centro e raggio.

Il modello di Poincaré

Le parallele asintotiche (Bolyai)



$$PB \cong HQ$$

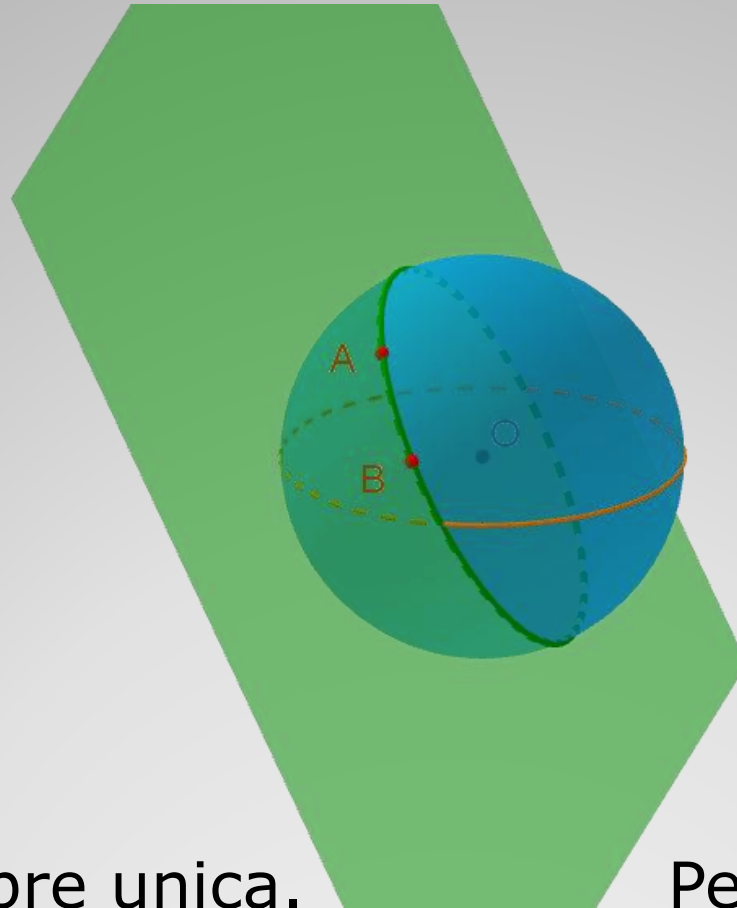
Il modello di Poincaré

La geometria ellittica doppia

- *Piano* = superficie di una sfera
- *Punto* = punto euclideo sulla superficie
- *Retta* = circonferenza massima

La superficie sferica

La retta per due punti

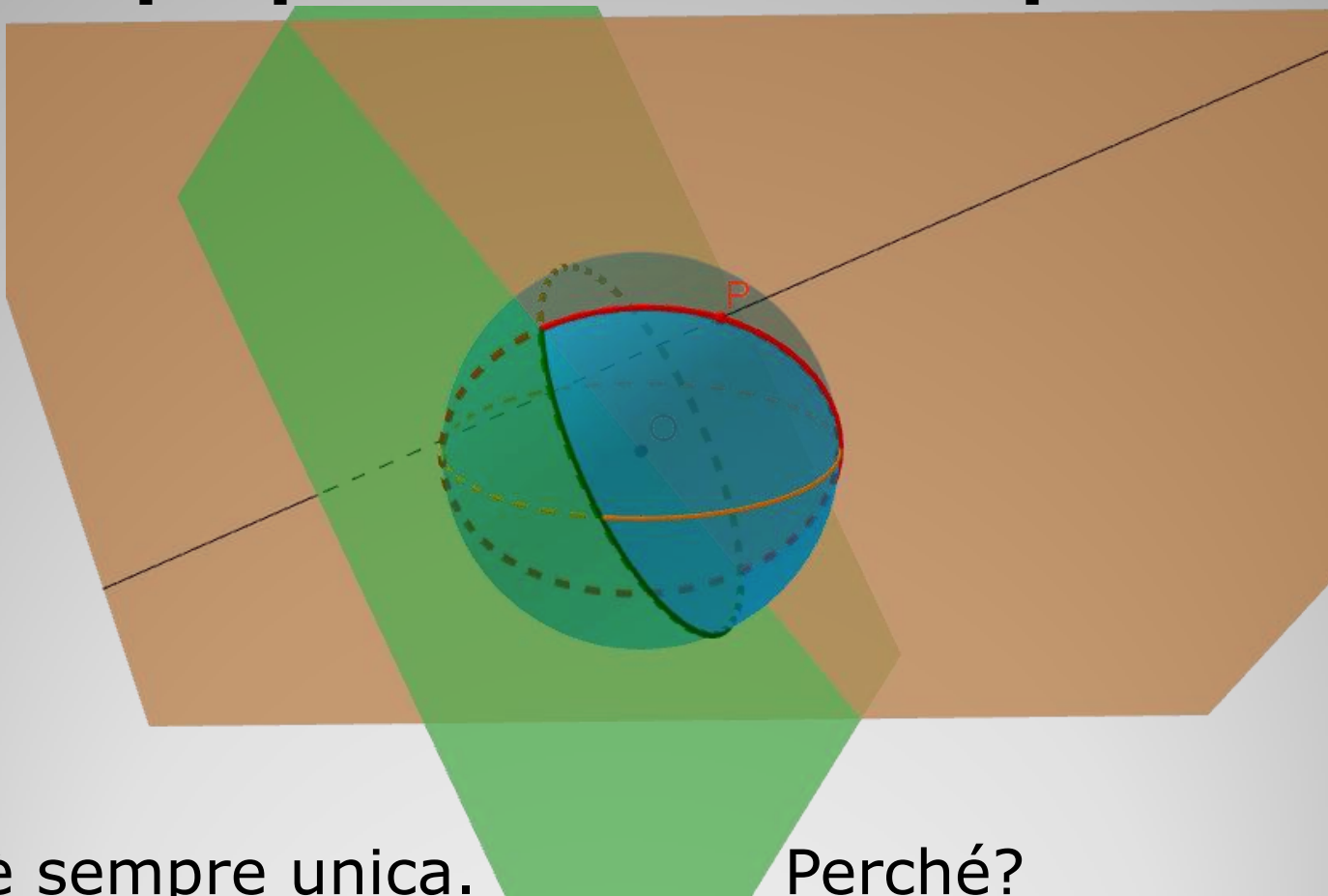


Non è sempre unica.

Perché?

La superficie sferica

La perpendicolare da un punto

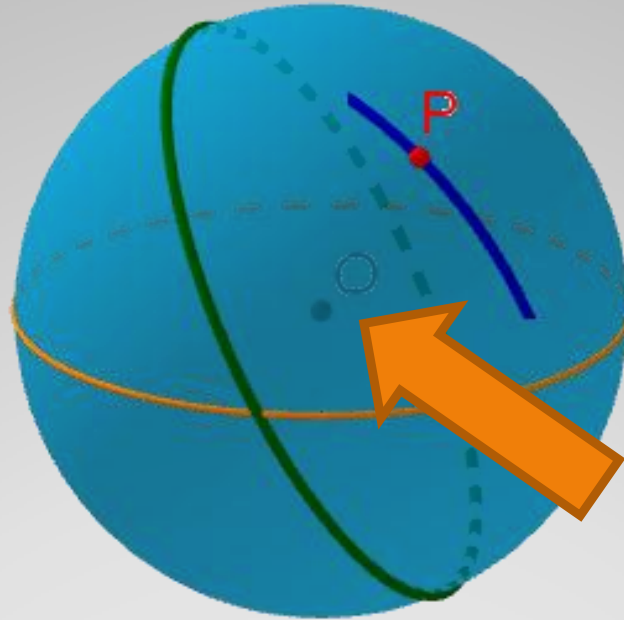


Non è sempre unica.

Perché?

La superficie sferica

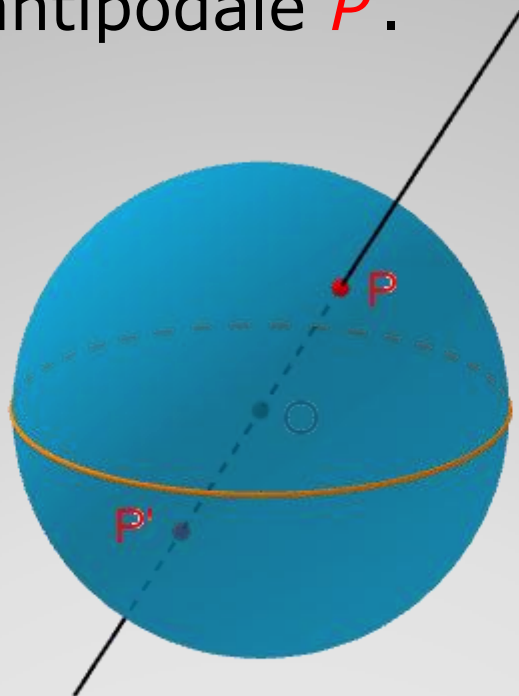
Non esistono parallele



Perché?

La superficie sferica

Ogni retta che passa per un punto P passa anche per il suo punto antipodale P' .



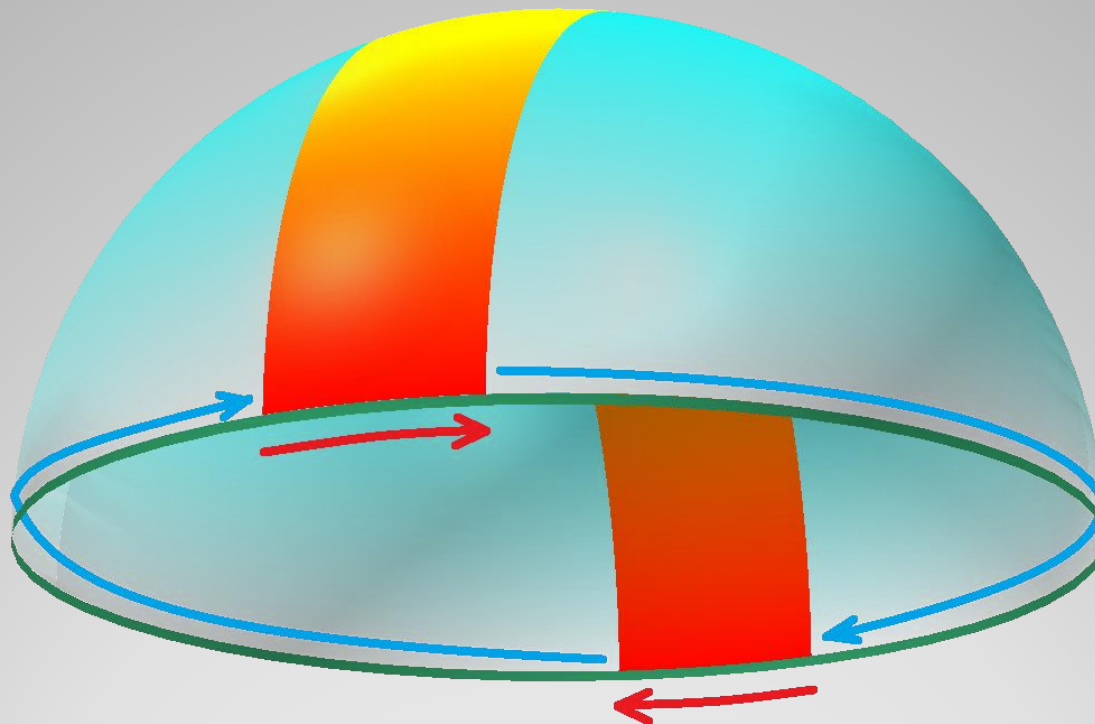
$$\mathbb{S}^2 = \bigcup_{P \in \mathbb{S}^2} [P] \quad [P] = \{P, P'\} \quad P \sim P'$$

Una relazione di equivalenza

- **La geometria ellittica semplice**
- *Piano* = insieme quoziente della relazione $\sim$ sulla superficie sferica
- *Punto* = classe di equivalenza di un punto sferico
- *Retta* = insieme delle classi di equivalenza dei punti di una circonferenza massima

Il piano ellittico

Il piano ellittico non è orientabile



Contiene un nastro di Möbius

Il piano ellittico

La Geometria Preassoluta

Gli assiomi di incidenza e orientazione
I teoremi fondamentali

Assiomi di incidenza

L'insieme dei punti del piano è suddiviso in **coppie di punti** tali che **ogni punto del piano appartiene ad una e una sola coppia** e **i punti di ciascuna coppia sono distinti**.

Per due punti che appartengono a **coppie distinte** passa **una ed una sola retta**.

Per i due punti di una **stessa coppia** passano **più rette**.

Due rette qualunque si intersecano («*Riemann*»).

Geometria sferica

$\mathfrak{B}(A,B,C)$ significa che « B sta fra A e C »

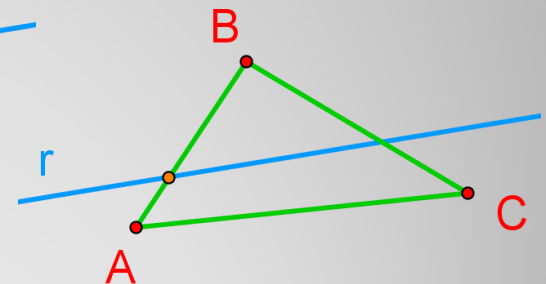
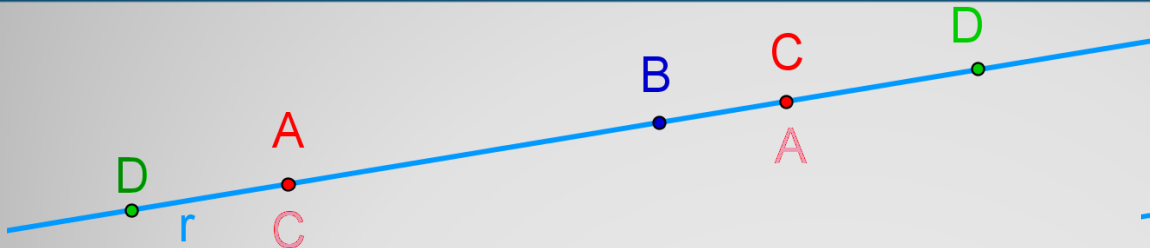
$$\mathfrak{B}(A,B,C) \rightarrow \exists r A \in r \wedge B \in r \wedge C \in r$$

$$\exists D \mathfrak{B}(A,C,D)$$

$$A \in r \wedge B \in r \wedge C \in r \rightarrow \mathfrak{B}(A,B,C) \vee \mathfrak{B}(B,A,C) \vee \mathfrak{B}(A,C,B)$$

$$\Delta(A,B,C) \wedge \mathfrak{I}(r,AB) \wedge C \notin r \rightarrow \mathfrak{I}(r,AC) \vee \mathfrak{I}(r,BC)$$

Pasch $D < 3$



$\vee$ = disgiunzione esclusiva

$\Delta(A,B,C)$ = « A, B e C sono i vertici di un triangolo»

$\mathfrak{I}(r,AB)$ = « r interseca AB in un suo punto interno»

Retta aperta – «Stare fra»

$\mathfrak{S}(AB|CD)$ significa che «A e B separano C e D»

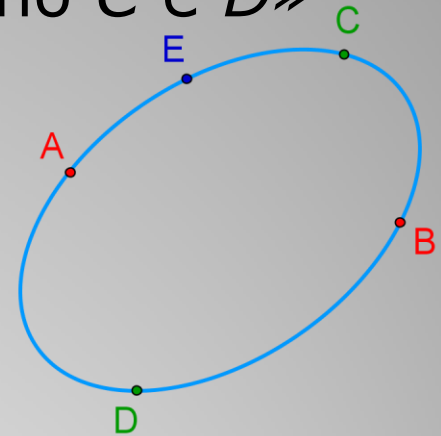
$$\mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow \exists r \ A \in r \wedge B \in r \wedge C \in r \wedge D \in r$$

$$\mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow \mathfrak{S}(AB|DC) \wedge \mathfrak{S}(CD|AB)$$

$$A \in r \wedge B \in r \wedge C \in r \rightarrow \exists D \ \mathfrak{S}(AB|CD)$$

$$A, B, C, D \in r \rightarrow \mathfrak{S}(AB|CD) \vee \mathfrak{S}(AC|BD) \vee \mathfrak{S}(AD|BC)$$

$$\mathfrak{S}(AB|CD) \wedge \mathfrak{S}(AC|BE) \rightarrow \mathfrak{S}(AB|DE)$$



Retta chiusa – «Separazione»

$\mathfrak{S}(AB|CD)$ significa che «A e B separano C e D»

$\mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow$

$\mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow$

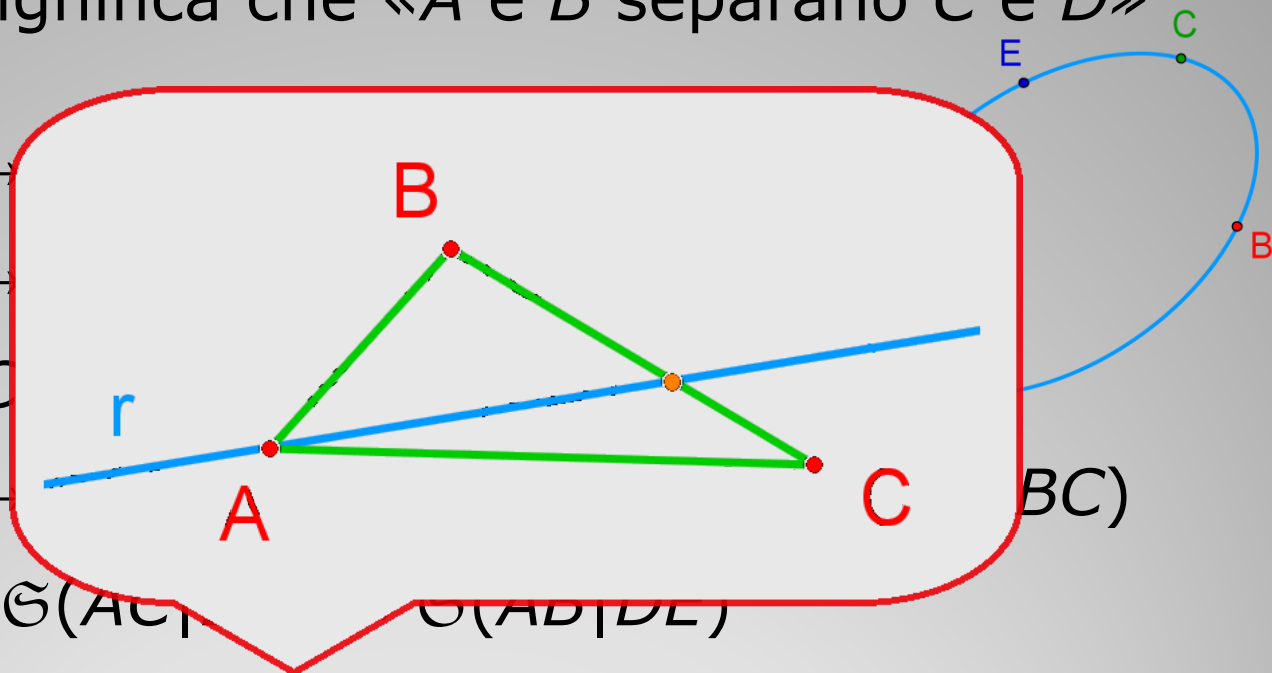
$A \in r \wedge B \in r \wedge C$

$A, B, C, D \in r \rightarrow$

$\mathfrak{S}(AB|CD) \wedge \mathfrak{S}(AC|BD) \rightarrow \mathfrak{S}(AD|BC)$

$\Delta(A, B, C) \wedge A \in r \wedge \mathfrak{I}(r, A, B, C) \rightarrow \mathfrak{I}(r, BC)$

$\mathfrak{I} =$ la retta r ha un punto interno al triangolo ABC



Retta chiusa – «Separazione»

$\mathfrak{S}(AB|CD)$ significa

$\mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow$

$\mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow$

$A \in r \wedge B \in r \wedge C$

$A, B, C, D \in r \rightarrow$

$\mathfrak{S}(AB|CD) \wedge \mathfrak{S}(AC|BD)$

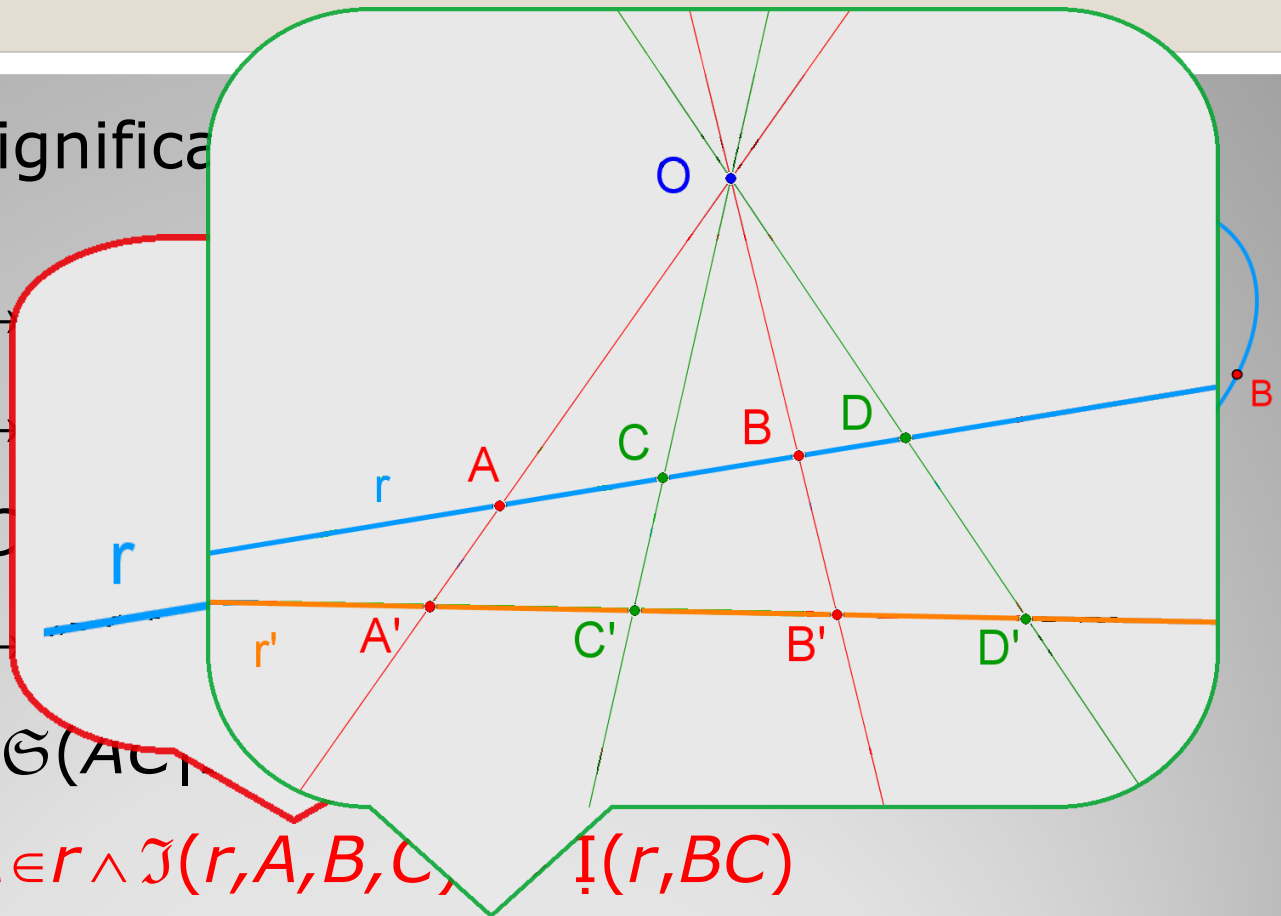
$\Delta(A, B, C) \wedge A \in r \wedge \mathfrak{I}(r, A, B, C, \dot{I}(r, BC))$

$(A', B', C', D') = \mathcal{P}_O(A, B, C, D) \wedge \mathfrak{S}(AB|CD) \rightarrow \mathfrak{S}(A'B'|C'D')$

$\mathfrak{I}$ = la retta r ha un punto interno al triangolo ABC

$\mathcal{P}_O$ = prospettiva di centro O tra le rette r e r'

Retta chiusa – «Separazione»



Assiomi di incidenza

Esiste una relazione di equivalenza (**simmetria**) $\sim$ tra i punti del piano, le cui classi di equivalenza contengono al più due punti.

Dati due punti P e Q esiste una retta r ad essi incidente.

Se $P \not\sim Q$ allora tale retta r è unica.

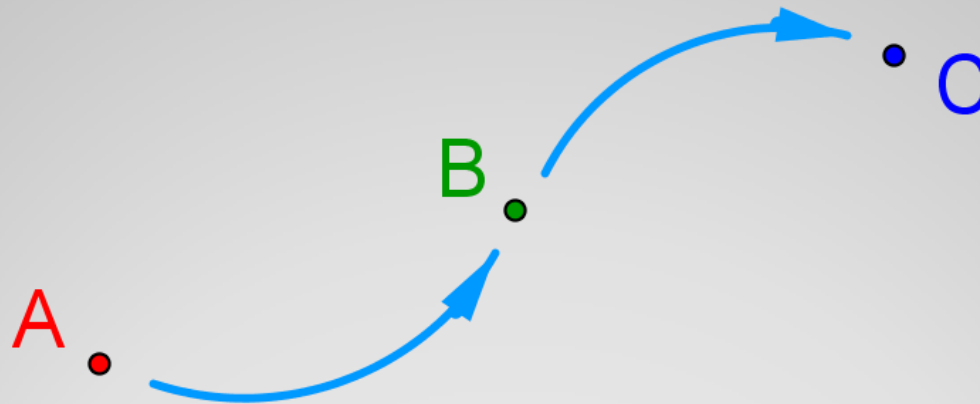
Se $P \sim Q \wedge P \neq Q$ allora esiste una retta $s \neq r$ ad essi incidente.

Ad ogni retta appartengono almeno due punti ed esistono tre punti non allineati.

Geometria Preassoluta

Relazione di orientazione

$A \succ B \succ C$ (si legge **da** A **a** B **a** C) significa che «partendo da A per giungere a C si passa per B »



$$A \succ B \succ C \rightarrow A \neq B \wedge B \neq C \wedge C \neq A$$

$$A \succ B \succ C \rightarrow \exists r \, A \in r \wedge B \in r \wedge C \in r$$

Geometria Preassoluta

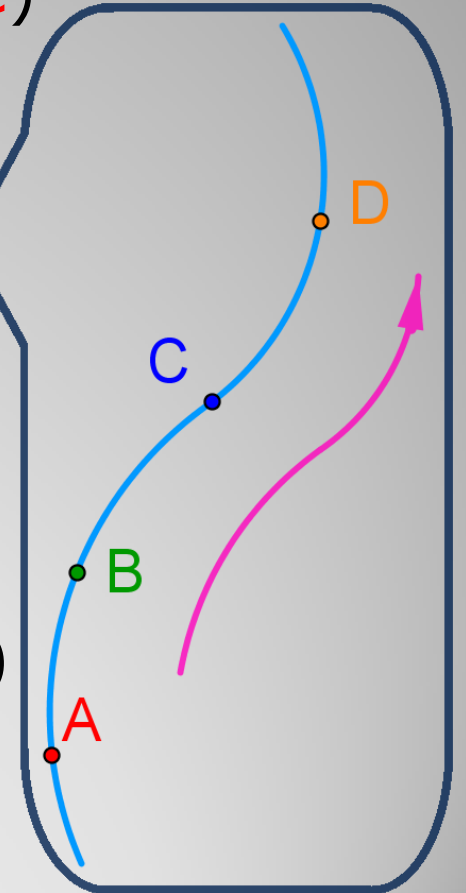
Assiomi di orientazione ($D > 1$)

(regole di concatenazione)

$$A \succ B \succ C \wedge A \succ C \succ D \leftrightarrow A \succ B \succ D \wedge B \succ C \succ D$$

$$A \succ B \succ C \wedge C \succ D \succ E \wedge A \neq E \wedge B \neq D$$

$$\downarrow$$
$$(A \succ C \succ E \vee E \succ C \succ A) \wedge (B \succ C \succ D \vee D \succ C \succ B)$$



Geometria Preassoluta

Assiomi di orientamento

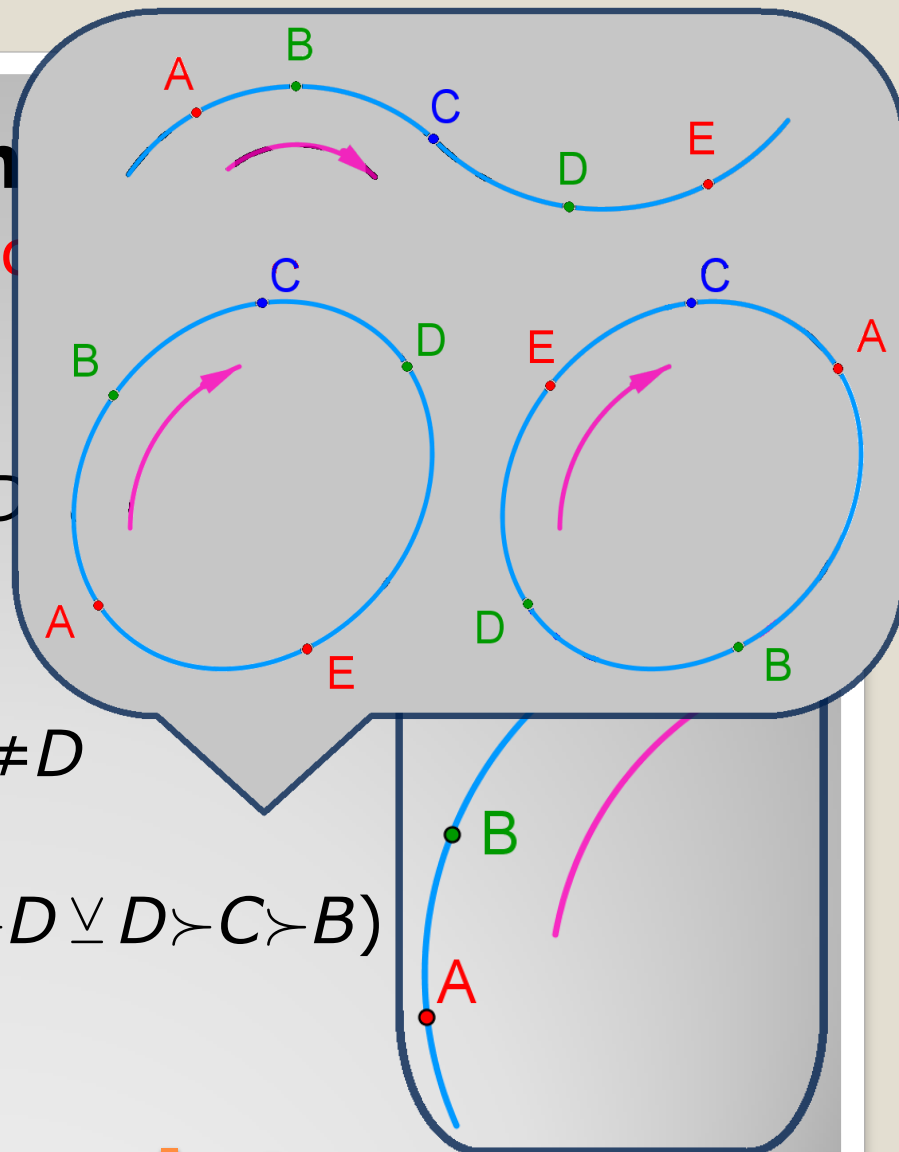
(regole di **con**)

$$A \succ B \succ C \wedge A \succ C \succ D \leftrightarrow A \succ B \succ D$$

$$A \succ B \succ C \wedge C \succ D \succ E \wedge A \neq E \wedge B \neq D$$

$$\downarrow$$

$$(A \succ C \succ E \vee E \succ C \succ A) \wedge (B \succ C \succ D \vee D \succ C \succ B)$$



Geometria Preassoluta

Assiomi di orientazione ($D > 1$)

(prolungabilità, estensione, non banalità)

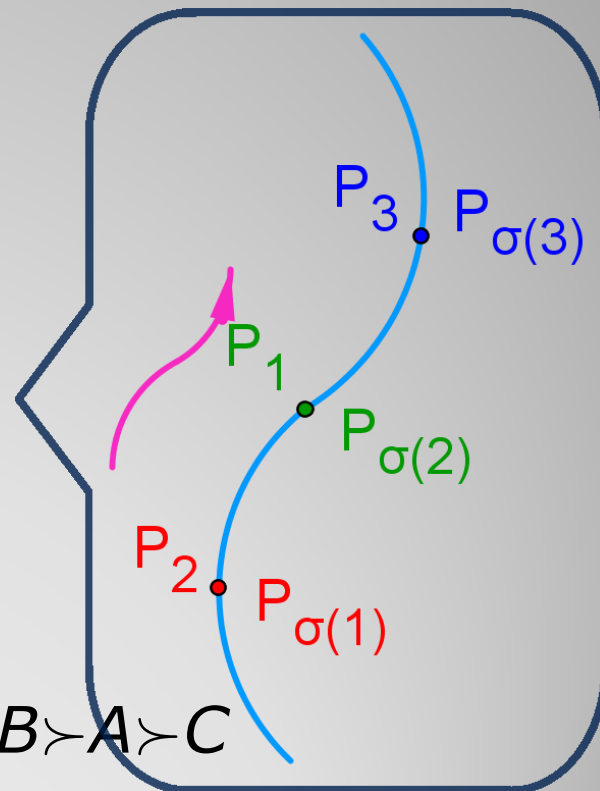
$$B \in r \rightarrow \exists A \in r, C \in r \ A \succ B \succ C$$

$$P_1, P_2, P_3 \in r \wedge P_1 \neq P_2 \wedge P_2 \neq P_3 \wedge P_3 \neq P_1$$



$$\exists \sigma \in S_3 \ P_{\sigma(1)} \succ P_{\sigma(2)} \succ P_{\sigma(3)}$$

$$A \succ B \succ C \rightarrow \neg A \succ C \succ B \wedge \neg C \succ B \succ A \wedge \neg B \succ A \succ C$$



Geometria Preassoluta

Assiomi di orientazione ($D > 1$)

(prolungabilità, estensione, non banalità)

$$B \in r \rightarrow \exists A \in r, C \in r \ A \succ B \succ C$$

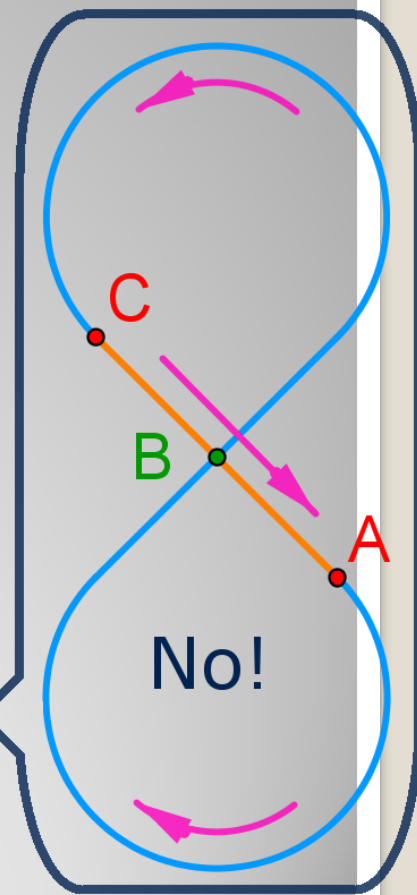
$$P_1, P_2, P_3 \in r \wedge P_1 \neq P_2 \wedge P_2 \neq P_3 \wedge P_3 \neq P_1$$

↓

$$\exists \sigma \in S_3 \ P_{\sigma(1)} \succ P_{\sigma(2)} \succ P_{\sigma(3)}$$

$$A \succ B \succ C \rightarrow \neg A \succ C \succ B \wedge \neg C \succ B \succ A \wedge \neg B \succ A \succ C$$

Geometria Preassoluta



Assiomi di orientazione ($D < 3$) (separazione)

Dato l'angolo $r_{\succ} \hat{O} s_{\succ}$, due punti P e Q si dicono **separati** rispetto ad esso, $P \cdot / \cdot Q$, se ogni segmento di estremi P e Q interseca uno solo dei due lati dell'angolo, oppure li interseca entrambi in O .

Notazione: $P \cdot \cdot Q = \neg P \cdot / \cdot Q$ (P e Q non sono separati).

- $\cdot \cdot$ è una relazione di equivalenza.
- $\dot{I}(t, r_{O,\succ}) \vee \dot{I}(t, s_{O,\succ}) \rightarrow \exists P \in t, Q \in t \ P \cdot / \cdot Q$

Geometria Preassoluta

Teorema di caratterizzazione delle rette

Siano dati $A, B, C \in r$ tali che $A \succ B \succ C$.

- Se vale $B \succ C \succ A$ allora vale anche $C \succ A \succ B$ e i punti di r sono ciclicamente ordinati da $\succ$.

La retta r è chiusa

- Se non vale $B \succ C \succ A$ allora non vale nemmeno $C \succ A \succ B$ e i punti di r sono linearmente ordinati da $\succ$.

La retta r è aperta

Geometria Preassoluta

Teorema di classificazione

Utilizzando gli assiomi di congruenza si dimostra che

- Se esiste una retta aperta allora tutte le rette sono aperte
- Se esiste una retta chiusa allora tutte le rette sono chiuse
- Se esiste una coppia di punti distinti e simmetrici tra loro allora ogni punto ha un simmetrico distinto da esso e tutte le rette sono chiuse

Geometria Preassoluta

Conseguenze

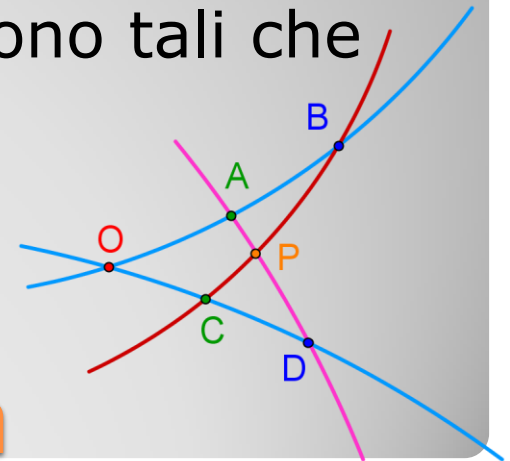
Teorema di densità della retta.

(Utilizza gli assiomi di prolungabilità e di separazione)

Teorema di selezione. Dati l'angolo $r_{\searrow} \hat{O} s_{\searrow}$, i punti A e B su $r_{O,\searrow}$ e i punti A e C su $s_{O,\searrow}$ tali che $O \succ A \succ B$ e $O \succ C \succ D$, le rette AD e BC si intersecano in un punto P (ed eventualmente in P'). Due punti P e Q di intersezione di questo tipo sono tali che $P \cdot \cdot Q$ (o, eventualmente, $P \cdot \cdot Q'$).

Definizione. Interno di un angolo.

Geometria Preassoluta



Conseguenze

Teorema di attraversamento.

Definizione di triangolo.

Assioma di Pasch.

Teorema di Non-Esistenza.

Nella geometria chiusa non esistono parallele, cioè due rette qualsiasi si intersecano.

Geometria Preassoluta



Il metodo *qualitativo* di Euclide

Il sistema di Euclide, senza mai fare riferimento alla quantità N di rette parallele, produce due teoremi che *de facto* lo riguardano.

- PROPOSIZIONE 31: $\mathcal{E}$, $N \geq 1$ (geometria assoluta)
- PROPOSIZIONE 30: $\mathcal{U}$, $N \leq 1$ (usa POSTULATO V)

L'enunciato *quantitativo* $\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}$ ($N=1$) avrebbe potuto essere un *teorema*, in ogni caso *non un postulato*.

Euclide risponde al problema delle parallele con postulati di tipo geometrico-*qualitativo*.

Metodi assiomatici a confronto

Il metodo *quantitativo* moderno

Nel corso dell'Ottocento si assiste alla progressiva affermazione di un'assiomatica *quantitativa* delle parallele (Playfair, 1795):

- Lobačevskij – assioma iperbolico, $N > 1$
- Riemann – assioma ellittico, $N = 0$
- Hilbert – assioma «di Euclide», $N = 1$ (GdG, 1899)
assioma delle parallele, $N \leq 1$ (GdG^{IV}, 1913)

GdG = Grundlagen der Geometrie

Metodi assiomatici a confronto

La Geometria Preassoluta

Geometria assoluta:

RETTA APERTA $\rightarrow$ ESISTENZA

Geometria preassoluta:

RETTA CHIUSA $\rightarrow$ NON-ESISTENZA

Il problema delle parallele viene affrontato con un metodo qualitativo.

Metodi assiomatici a confronto

Equivalenza in un sistema assiomatico

A, B enunciati equivalenti in un sistema Σ , $A \leftrightarrow_{\Sigma} B$:

A è teorema di $\Sigma+B$ e B è teorema di $\Sigma+A$

$A \rightarrow B$ è teorema di Σ e $B \rightarrow A$ è teorema di Σ

$\neg A \rightarrow \neg B$ è teorema di Σ e $\neg B \rightarrow \neg A$ è teorema di Σ

A, B sono logicamente equivalenti
se e solo se

A, B sono equivalenti in ogni sistema

$$\Sigma' \subseteq \Sigma, A \leftrightarrow_{\Sigma'} B \Rightarrow A \leftrightarrow_{\Sigma} B$$

Equivalenza tra enunciati

Enunciati indecisi

$\mathcal{S}$ = «Tutti i punti sono singoli»

$\mathcal{D}$ = «Tutti i punti sono doppi»

$\mathcal{A}$ = «Tutte le rette sono aperte»

$\mathcal{C}$ = «Tutte le rette sono chiuse»

$\mathcal{Q}$ = Il piano è «imploso»

$\neg \mathcal{Q}$ = Il piano è «esploso»

$\mathcal{E}$ = Esistenza della parallela

$\mathcal{U}$ = Unicità della parallela

Geometria Preassoluta - I

Teoremi diretti/inversi - Equivalenze

(per la gioia di Euclide...)

Teorema di **CLASSIFICAZIONE**

$$S \rightarrow \neg D, D \rightarrow \neg S, \neg D \rightarrow S, \neg S \rightarrow D$$

$$S \leftrightarrow \neg D$$

$$A \rightarrow \neg C, C \rightarrow \neg A, \neg C \rightarrow A, \neg A \rightarrow C$$

$$A \leftrightarrow \neg C$$

Teorema di **ESISTENZA** (PROPOSIZIONE 31)

$$A \rightarrow \mathcal{E}, \neg \mathcal{E} \rightarrow C$$

$$A \leftrightarrow \mathcal{E}$$

Teorema di **NON-ESISTENZA**

$$C \rightarrow \neg \mathcal{E}, \mathcal{E} \rightarrow A$$

$$C \leftrightarrow \neg \mathcal{E}$$

Meta-teorema di **UNICITÀ**

$$Q \rightarrow \mathcal{U}, \neg \mathcal{U} \rightarrow \neg Q, \mathcal{U} \rightarrow Q, \neg Q \rightarrow \neg \mathcal{U}$$

$$Q \leftrightarrow \mathcal{U}$$

$$\neg \mathcal{U} \leftrightarrow \neg Q$$

Geometria Preassoluta - Γ

Teoremi (solo) diretti

Teoremi di **CLASSIFICAZIONE** , di **ESISTENZA** e di **NON-ESISTENZA**

$$\begin{array}{ll} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S} \\ \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U} & \neg \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S} \\ \neg \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A} & \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{U} \end{array}$$

Equivalenza tra i due metodi

Qualitativo	$\Leftrightarrow$	Quantitativo
$\mathcal{A} / \mathcal{C}$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{E} (N \geq 1) / \neg \mathcal{E} (N < 1)$
$\mathcal{Q} / \neg \mathcal{Q}$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{U} (N \leq 1) / \neg \mathcal{U} (N > 1)$

Geometria Preassoluta - Γ

UNICITÀ $\mathcal{U}$: **se** x, y sono incidenti tra loro e parallele a z **allora** x, y coincidono

$$\forall x \forall y \forall z ((\neg x \wp y \wedge (x \wp z \wedge y \wp z)) \rightarrow x = y)$$

PROP. 30: **se** x, y sono parallele a z **allora** x, y sono parallele tra loro

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow ((x \wp z \wedge y \wp z) \rightarrow x \wp y))$$

PLAYFAIR: **se** x, y sono incidenti **allora** non sono entrambe parallele a z

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow (\neg x \wp y \rightarrow \neg (x \wp z \wedge y \wp z)))$$

Sostituti del quinto postulato

UNICITÀ $\mathcal{U}$:

Per un punto P non possono passare due rette parallele a una retta data: non è detto che debba passarne una sola, può accadere che non ne passi nessuna.

PROP. 30:

Come per la monogamia: non si possono avere due mogli/mariti, ma il matrimonio non è obbligatorio!

PLAYFAIR: **se** x, y sono incidenti **allora** non sono entrambe parallele a z

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow (\neg x \parallel y \rightarrow \neg (x \parallel z \wedge y \parallel z)))$$

Sostituti del quinto postulato

PROCLO: **se** x è tagliata da una trasversale y e x è parallela a z **allora** z è tagliata da y

$$\forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow ((\neg x \wp y \wedge x \wp z) \rightarrow \neg y \wp z))$$

Meta-teorema di UNICITÀ - A

Gli enunciati

PROPOSIZIONE 30, **UNICITÀ $\mathcal{U}$** , **PLAYFAIR**, **PROCLO**

sono *logicamente equivalenti*.

Esempio: PROPOSIZIONE 30 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \neq y) \rightarrow ((x \wp z \wedge y \wp z) \rightarrow x \wp y))$
 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z (\neg((x \wp z \wedge y \wp z) \rightarrow x \wp y) \rightarrow x = y)$
 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((\neg x \wp y \wedge (x \wp z \wedge y \wp z)) \rightarrow x = y)$
 $\Leftrightarrow$ UNICITÀ $\mathcal{U}$

Sostituti del quinto postulato

Meta-teorema di UNICITÀ - B

Gli enunciati

PROPOSIZIONE 30, UNICITÀ $\mathcal{U}$, PLAYFAIR, PROCLO,
PROPOSIZIONE 29, POSTULATO V

sono equivalenti nella geometria preassoluta.

- PROPOSIZIONE 30, UNICITÀ $\mathcal{U}$, PROPOSIZIONE 29 sono veri nella geometria chiusa perché hanno l'antecedente falso.
- PLAYFAIR, PROCLO, POSTULATO V sono veri nella geometria chiusa perché hanno il conseguente vero.

Sostituti del quinto postulato

Le euclidee PROPOSIZIONI 29 e 30 sono essenzialmente gli unici enunciati equivalenti all'euclideo POSTULATO V nella geometria preassoluta.

La miriade di altri enunciati escogitati per rimpiazzare il POSTULATO V gli erano equivalenti soltanto nella geometria assoluta e non nella più fondamentale geometria preassoluta!

Meta-teorema del QUINTO POSTULATO

L'enunciato Q non è teorema della geometria aperta, è teorema della geometria chiusa, quindi non è teorema della geometria preassoluta.

Sostituti del quinto postulato

Assioma delle parallele: $\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}$ ($N=1$)

↓ NEGAZIONE ↓

$$\neg(\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}) = \neg\mathcal{E} \vee \neg\mathcal{U}$$

$\Leftrightarrow$

$$N < 1 \vee N > 1$$

Definizione «ufficiale»
delle geometrie
non-euclidee

Ellittica

Iperbolica

$\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}$ è falso nella geometria ellittica

Pregiudizio

«POSTULATO V è falso nella geometria ellittica»

Conclusioni

Assioma delle parallele: $\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}$ ($N=1$)

↓ NEGAZIONE ↓

$$\neg(\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}) = \neg\mathcal{E} \vee \neg\mathcal{U}$$

$\Leftrightarrow$

$$N < 1 \vee N > 1$$

Definizione «ufficiale»
delle geometrie
non-euclidee

Ellittica

Iperbolica

Tutte le rette si intersecano

$\mathcal{E} \wedge \mathcal{U}$ è falso nella geometria ellittica

~~Pregiudizio~~

«POSTULATO V è **vero** nella geometria ellittica»

Conclusioni

La definizione «ufficiale» è corretta?

Tre contesti diversi

1. Nella geometria assoluta ($\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$)

Non corretta: produce solo la geometria iperbolica!

2. In una geometria più ampia dove può valere $\neg \mathcal{A}$

Non corretta se non si precisa il concetto di retta non-aperta!

3. In una geometria più generale dove possono valere sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{C}$

Corretta se $\neg \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{C}$: è la geometria preassoluta!

Conclusioni

Euclide e il problema delle parallele

Enunciato	N° parallele	Tipologia retta	Geometria
PROPOSIZIONE 28 INCIDENZA $\rightarrow$ CONVERGENZA	ESISTENZA $N \geq 1$	APERTA	ASSOLUTA EUCLIDEA IPERBOLICA
NON-PROPOSIZIONE 28 INCIDENZA + NON-CONVERGENZA	UNICITÀ + NON-ESISTENZA $N < 1$	CHIUSA	ELLITTICA
POSTULATO V CONVERGENZA $\rightarrow$ INCIDENZA	UNICITÀ $N \leq 1$	APERTA CHIUSA	EUCLIDEA ELLITTICA
NON-POSTULATO V CONVERGENZA + NON-INCIDENZA	ESISTENZA + NON-UNICITÀ $N > 1$	APERTA	IPERBOLICA

Conclusioni

Rivoluzione euclidea delle geometrie non-euclidee

POSTULATO I

POSTULATO II

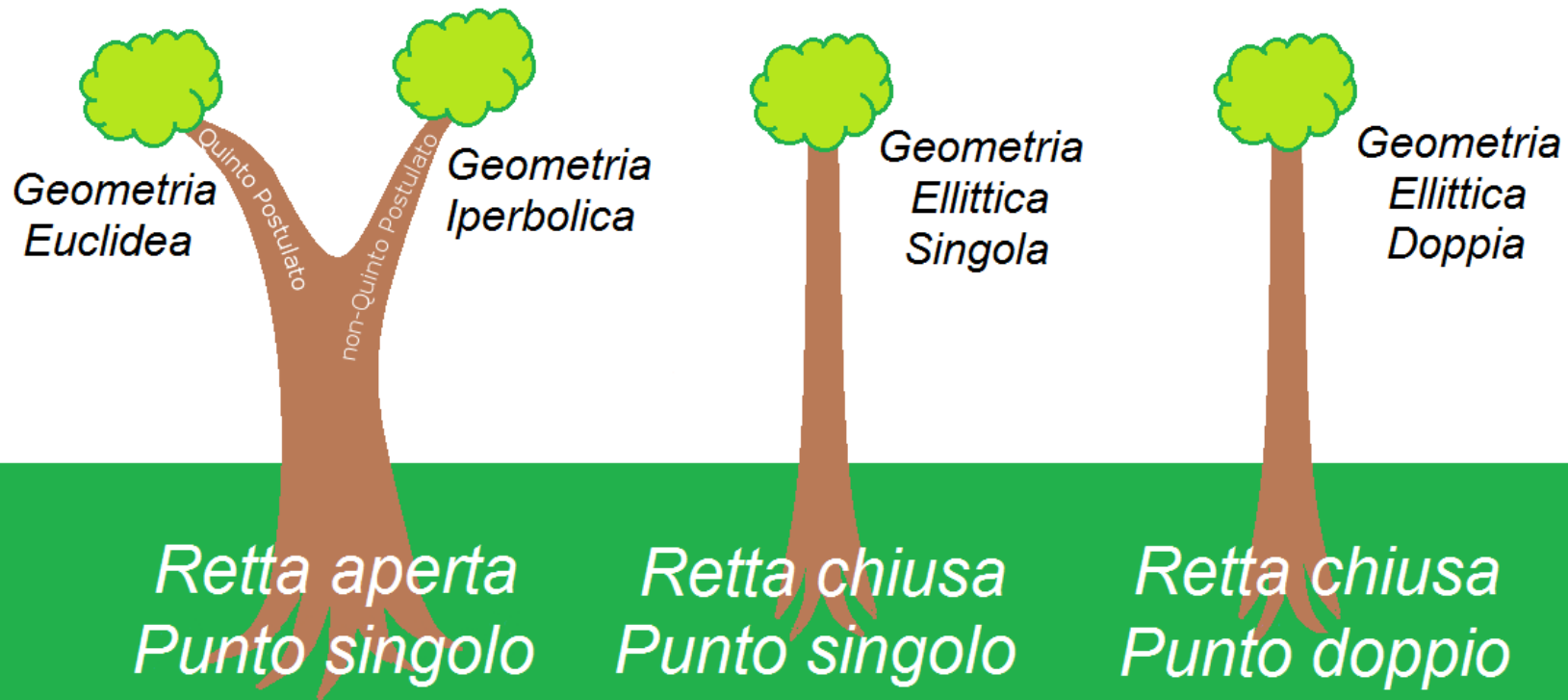
POSTULATO V

Identificazione di CONVERGENZA / INCIDENZA

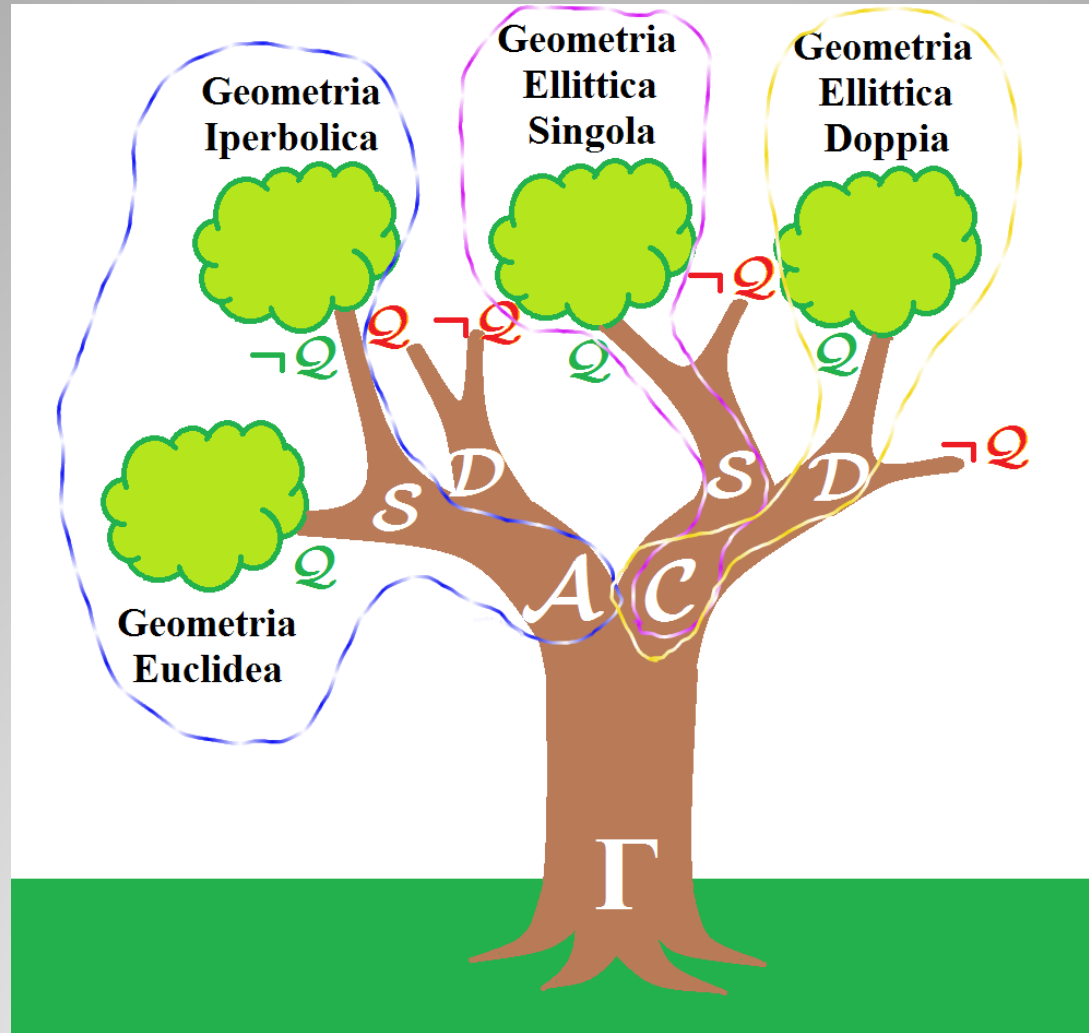
Separazione di ESISTENZA / UNICITÀ

Metodo qualitativo

Conclusioni



Conclusioni



Conclusioni

- Euclide – *Tutte le opere* (F. Acerbi) – Bompiani
- L. Russo – *La rivoluzione dimenticata* – Feltrinelli
- B. Riemann – *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* – Bollati Boringhieri
- D. Hilbert – *Grundlagen der Geometrie* – Teubner
- R. Hartshorne – *Geometry: Euclid and beyond* – Springer
- P. Odifreddi – *Divertimento geometrico* – Bollati Boringhieri
- E. Agazzi, D. Palladino – *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria* – La Scuola
- R. Migliorato – *La Rivoluzione Euclidea e i «Paradigmi Scientifici» nei Regni Ellenistici* – Incontri Mediterranei **15** (2005)
- F. Rupeni, A. Zampa – *Il peccato di Euclide – Pregiudizi sul Quinto Postulato* – In cerca di editore
- A. Zampa, F. Rupeni – *Il peccato di Euclide – Alla ricerca della Geometria Preassoluta* – In cerca di editore
- A. Zampa, F. Rupeni – *Pre-Absolute Geometry: a unification of all elementary geometries* – In stesura la versione definitiva

Bibliografia

GRAZIE!