Stage di Matematica - Udine

Gara A Squadre - venerdì 7 febbraio 2020

ISTRUZIONI GENERALI

- Per ogni esercizio occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la soluzione è un numero intero maggiore di 9999 si indichino le ultime quattro cifre del numero.
- Se la soluzione è un numero negativo oppure il problema non ammette soluzione si indichi come risposta 0000.
- **Se la soluzione è una frazione $\frac{a}{b}$ (con a, b primi tra loro e $b > 1$), si indichi come risposta l'intero $a + b$.**
- Per i calcoli si utilizzino i seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142, \quad \sqrt{3} = 1.7321, \quad \sqrt{5} = 2.2361, \quad \sqrt{7} = 2.6458, \quad \pi = 3.1416$$

- Non è ammesso l'uso di computer, calcolatrici, cellulari, carte da gioco, dadi.

Non Sei Mai Troppo Piccolo Per Fare La Differenza.

Greta Thunberg

Gara redatta da Enrico Munini.

1. Meno Auto, Più Bici. In un parcheggio ci sono 2020 veicoli tra auto e bici. In totale ci sono 5862 ruote. Come risposta scrivi la somma delle cifre del prodotto tra il numero di auto e il numero di bici.

2. Greta Thunberg. Lettere uguali, cifre uguali. Lettere diverse, cifre diverse.
   `HERE + SHE = COMES`
   A cosa corrisponde `MORE` ?

3. Utilizza gli Elettrodomestici a Pieno Carico. Nel quadrilatero $ABCD$ le misure di alcuni angoli sono: $\widehat{ABD} = 10°$, $\widehat{DBC} = 50°$, $\widehat{DCA} = 20°$ e $\widehat{ACB} = 60°$. Trova $\widehat{ADB}$.

4. Non Sprecare l'Acqua. Un numero intero n è *acquoso* quando valgono le tre condizioni seguenti:
   - Nessuna delle cifre di n è nulla;
   - Le cifre di n sono tutte differenti;
   - Ciascuna cifra di n divide n.

   Determina il più grande n *acquoso* che contiene la cifra 5.

5. Ricicla, Ricicla, Ricicla. Trova la somma dei valori di k maggiori di 100 e minori di 200 per i quali $k! \cdot (k+1)!$ risulta un quadrato perfetto.

6. Salviamo l'Amazzonia. Un numero *brasiliano* è un numero n che in base b (maggiore di 1 e minore di n) si scrive con cifre (almeno due) tutte uguali. Per esempio 7 è un numero *brasiliano* poiché $7 = 111_2$. Determina le sei basi in cui 2020 risulta essere un numero brasiliano. Come risposta scrivi la somma delle sei basi trovate.

7. Non Sprecare il Cibo. PQ è una diagonale (interna) di un cubo di 30 cm di lato. I tre vertici adiacenti a P e i tre vertici adiacenti a Q formano due triangoli che dividono la diagonale PQ in tre parti. Qual è il prodotto delle tre parti in cui rimane divisa la diagonale?

8. Consuma Più Frutta e Verdura. AB è una corda di lunghezza 6 in un cerchio di raggio 5 e centro O. Un quadrato è inscritto nel settore OAB con due vertici sulla circonferenza e due lati paralleli ad AB. Trova l'area del quadrato.

9. Usa le Borse di Tela. Quanti sono i numeri di 7 cifre con la proprietà che in ogni coppia di cifre consecutive la cifra a sinistra è minore di o uguale a quella di destra?

10. Fai la Raccolta Differenziata.
    Risolvi in $\mathbb{R}$ l'equazione
    $$(x^2 + x - 2)^3 + (2x^2 - x - 1)^3 = 27(x^2 - 1)^3$$
    Come risposta scrivi la somma dei quadrati delle soluzioni dell'equazione.

11. Evita gli sprechi. Data l'operazione
    $$m \triangle n = \frac{m+n}{mn+9}$$
    determina $((((10 \triangle 9) \triangle 8) \triangle \cdots \triangle 2) \triangle 1)$.

12. Spegni le Luci. Trova tutte le coppie di numeri interi non negativi (m, n) tali che
    $$3 \cdot 2^m + 1 = n^2.$$
    Come risposta scrivi nelle prime due cifre a sinistra il numero di coppie trovate e nelle ultime 2 cifre a destra la somma di tutti i valori di m e n.

13. Usa Lampadine a LED. Un trapezio rettangolo ha le diagonali perpendicolari. La base maggiore supera di 5 m la base minore e l'altezza misura 6 m. Calcola il prodotto delle misure delle due diagonali.

14. Usa la Carta Riciclata. Calcola la probabilità che tre distinti vertici di un cubo, scelti a caso, individuino un triangolo rettangolo.

15. Scegli Prodotti a km 0. Determina tutte le coppie di numeri interi positivi (a, b) con $a \leq b$ tali che $a^2 + b^2 = 2020$. Come risposta scrivi la somma di tutti i valori di a e di b trovati.

16. Usa lo Spazzolino in Bambù. In quante regioni al massimo viene divisa una superficie sferica da 10 cerchi massimi che giacciono su di essa?

17. Usa la Borraccia. Le diagonali del quadrilatero $ABCD$ si intersecano nel punto E. Risulta $AB = CE$, $BE = AD$ e $\widehat{AED} = \widehat{BAD}$. Trova il valore di $1000\dfrac{BC}{AD}$.

18. No Cannucce di Plastica. Due amici si sono iscritti alla prima classe del liceo "Celio". Il liceo ha solo due sezioni, le cui prime classi hanno rispettivamente n e m studenti con $20 < n < m < 30$. Sapendo che la probabilità che i due amici si trovino nella stessa classe è $1/2$ determina quanti sono gli studenti delle due classi. Scrivi come risposta il valore di mn.

19. Scegli Cosmetici e Detersivi Ecologici. Calcola le due cifre meno significative diverse da zero di 2020!

20. **Non Esiste il Pianeta B.**
    Risolvi la seguente equazione in $\mathbb{R}$
    $$2\sqrt[3]{2y-1} = y^3 + 1$$
    Come risposta scrivi le prime tre cifre dopo la virgola della somma dei valori assoluti delle soluzioni dell'equazione.

Stage di Matematica - Udine

Gara A Squadre - 7 febbraio 2020

RISPOSTE

ESERCIZIO	**TITOLO**	**RISPOSTA**
1	Meno Auto, Più Bici	0022
2	Greta Thunberg	3054
3	Utilizza gli Elettrodomestici a Pieno Carico	0030
4	Non Sprecare l'Acqua	9315
5	Ricicla, Ricicla, Ricicla	0626
6	Salviamo l'Amazzonia	4236
7	Non Sprecare il Cibo	5196
8	Consuma Più Frutta e Verdura	1009
9	Usa le Borse di Tela	6435
10	Fai la Raccolta Differenziata	0029
11	Evita gli sprechi	0076
12	Spegni le Luci	0321
13	Usa Lampadine a LED	0078
14	Usa la Carta Riciclata	0013
15	Scegli Prodotti a km 0	0120
16	Usa lo Spazzolino in Bambù	0092
17	Usa la Borraccia	1618
18	No Cannucce di Plastica	0588
19	Scegli Cosmetici e Detersivi Ecologici	0012
20	Non Esiste il Pianeta B	0236

Soluzioni Gara A Squadre - 7 febbraio 2020

1. *Meno auto, più bici.*
   Risolvendo il sistema
   $$\begin{cases} a + b = 2020 \\ 4a + 2b = 5862 \end{cases}$$
   si ottiene il numero di auto (911) e il numero di bici (1109). Il prodotto cercato è 1010299. La somma delle cifre è 22.
   Risposta $\boxed{0022}$.

2. *Greta Thunberg.*
   Dobbiamo risolvere il criptaritmo seguente
   $$\begin{array}{cccccc} & H & E & R & E & + \\ & & S & H & E & = \\ \hline C & O & M & E & S & \end{array}$$
   Evidentemente deve essere $C = 1$, $H = 9$ e $O = 0$. Si ottiene
   $$\begin{array}{cccccc} & 9 & E & R & E & + \\ & & S & 9 & E & = \\ \hline 1 & 0 & M & E & S & \end{array}$$
   Considerando le unità deve essere $E + E = S$ senza riporto, altrimenti nelle decine dovrebbe risultare $R = E$.
   Quindi E deve essere minore di 5 e $S = 2E$.
   Nelle centinaia invece è obbligatorio il riporto $E + S = E + 2E = 3E = 10 + M$.
   Quindi E deve essere maggiore di 3. Risulta allora $E = 4$, $S = 8$, $R = 5$ e $M = 3$.
   Si ottiene quindi
   $$\begin{array}{cccccc} & 9 & 4 & 5 & 4 & + \\ & & 8 & 9 & 4 & = \\ \hline 1 & 0 & 3 & 4 & 8 & \end{array}$$
   $MORE$ corrisponde a 3054.
   Risposta $\boxed{3054}$.

3. *Utilizza gli Elettrodomestici a Pieno Carico.*
   Risulta $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = 10° + 50° = 60°$, quindi il triangolo ABC è equilatero e dunque $BC = AC$ (*).
   Il triangolo BDC è isoscele sulla base BD in quanto
   $$\widehat{BDC} = 180° - (\widehat{DBC} + \widehat{BCA} + \widehat{ACD}) = 50° = \widehat{CBD}$$
   e quindi $BC = DC$ (**).
   Da (*) e (**) si ricava $AC = DC$; perciò il triangolo ACD è isoscele e l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ADC}$ risulta $80°$. L'angolo cercato misura $30°$.
   Risposta $\boxed{0030}$.

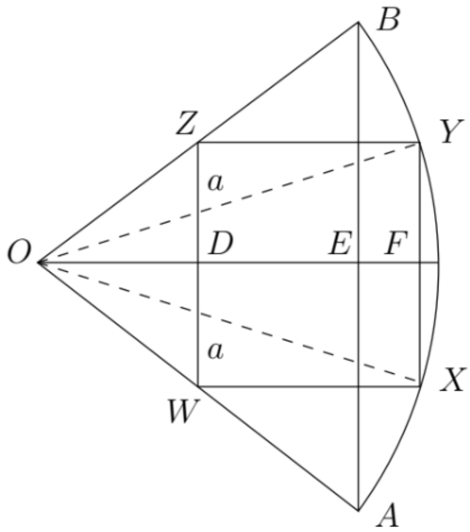
4. *Non Sprecare l'Acqua.*
   Se il numero n, *acquoso* contiene la cifra 5 deve essere divisibile per 5, quindi la cifra delle unità di n deve essere 5 (lo zero non è ammesso). n è quindi dispari e perciò deve contenere solo cifre dispari. n non può essere di cinque cifre dato che $1+3+5+7+9$ non è divisibile per 9. Se n è di quattro cifre dispari e contiene la cifra 9 allora le altre due cifre (oltre al 5) devono essere 3 e 1. Il più grande numero risulta pertanto 9315, divisibile per ciascuna delle sue cifre.
   Risposta $\boxed{9315}$.

5. *Ricicla, Ricicla, Ricicla.*
   Risulta
   $$A = k! \cdot (k+1)! = k! \cdot k! \cdot (k+1) = (k!)^2 \cdot (k+1).$$
   A è un quadrato se e solo se $k+1$ è un quadrato. I valori di k sono 120, 143, 168 e 195.
   Risposta $\boxed{0626}$.

6. *Salviamo l'Amazzonia.*
I divisori di 2020 sono $1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020$.
Risulta $2020 = |20|20|_{100} = |10|10|_{201} = |5|5|_{403} = |4|4|_{504} = |2|2|_{1009} = |1|1|_{2019}$.
La somma delle sei basi è $100 + 201 + 403 + 504 + 1009 + 2019 = 4236$.
Risposta $\boxed{4236}$.

7. *Non Sprecare il Cibo.*
Le tre parti in cui rimane divisa la diagonale sono uguali.
La diagonale misura $30\sqrt{3}$; il prodotto delle tre parti è $3000\sqrt{3}$.
Risposta $\boxed{5196}$.

8. *Consuma Più Frutta e Verdura.*
Il triangolo ODZ è simile al triangolo $(3, 4, 5)$ OEB.



Se $2a$ è il lato del quadrato allora OD misura $\frac{4}{3}a$. Ora $OF = OD + DF = \frac{4}{3}a + 2a = \frac{10}{3}a$ e applicando il Teorema di Pitagora al triangolo OFY si ottiene $OF^2 = 25 - a^2 = \frac{100}{9}a^2$.
Risolvendo si ottiene $a^2 = \frac{225}{199}$ e l'area del quadrato $4a^2$ risulta $\frac{900}{109}$.
Risposta $\boxed{1009}$.

9. *Usa le Borse di Tela.*
Sia $n = \overline{c_0c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$ un tale numero con $c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $c_0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_6$.
Per ogni $0 \leq i \leq 6$ consideriamo $b_i = c_i + i$ con $b \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ e $b_0 < b_1 < \cdots < b_6$.
Il problema è ora diventato la scelta di sette numeri su quindici, ovvero $\binom{15}{7}$.
Risposta $\boxed{6435}$.

10. *Fai la Raccolta Differenziata.*
L'equazione data corrisponde a

$$(x^2 + x - 2)^3 + (2x^2 - x - 1)^3 = (3x^2 - 3)^3 \qquad (*)$$

Ponendo $a = x^2 + x - 2$ e $b = 2x^2 - x - 1$ si ottiene $a + b = 3x^2 - 3$. Quindi la (*) diventa

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3$$

ovvero

$$3ab(a + b) = 0.$$

Si ottengono pertanto le soluzioni:

- $a = 0$, $x^2 + x - 2 = 0$, $x = 1 \lor x = -2$;
- $b = 0$, $2x^2 - x - 1 = 0$, $x = 1 \lor x = -1/2$;

- $a+b=0$, $x^2-1=0$, $x=1 \vee x=-1$.

La somma dei quadrati risulta $25/4$.
Risposta $\boxed{0029}$.

11. *Evita gli sprechi.*
Calcoliamo $m\triangle 3$
$$m\triangle 3 = \frac{m+3}{3m+9} = \frac{1}{3}.$$
Calcoliamo $\frac{1}{3}\triangle 2$
$$\frac{1}{3}\triangle 2 = \frac{\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{3}\cdot 2+9} = \frac{7}{29}.$$
Calcoliamo $\frac{7}{29}\triangle 1$
$$\frac{7}{29}\triangle 1 = \frac{\frac{7}{29}+1}{\frac{7}{29}\cdot 1+9} = \frac{9}{67}.$$
La risposta è $\boxed{0076}$.

12. *Spegni le Luci.*
Se la coppia (m, n) è una soluzione di
$$3\cdot 2^m + 1 = n^2$$
allora il membro di sinistra non è un multiplo di 3 quindi deve essere $n = 3k+1$ o $n = 3k+2$. Distinguiamo i due casi:

- $n = 3k+1$, allora
$$3\cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 6k + 1$$
e $2^m = 3k^2 + 2k = k(3k+2)$. Allora sia k e sia $3k+2$ devono essere potenze di 2.
$k = 1$ non soddisfa le richieste mentre $k = 2$ sì. Inoltre se k fosse una potenza di 2 maggiore di 2 allora $3k+2$ sarebbe divisibile per 2 ma non per 4 e quindi non ci sono ulteriori soluzioni. L'unica soluzione è perciò $(4, 7)$.
- $n = 3k+2$, allora
$$3\cdot 2^m + 1 = 9k^2 + 12k + 4$$
e $2^m = 3k^2 + 4k + 1 = (k+1)(3k+1)$. Allora sia $k+1$ e sia $3k+1$ devono essere potenze di 2.
Ora $3k+1 = 3(k+1) - 2$ e considerazioni analoghe al caso precedente impongono $k+1 < 4$.
Si ottengono soluzioni valide per $k = 0$ e $k = 1$, che portano alle due coppie $(0, 2)$ e $(3, 5)$.

In definitiva le tre soluzioni sono $(4, 7)$, $(0, 2)$ e $(3, 5)$.
La risposta è $\boxed{0321}$.

13. *Usa Lampadine a LED.*
Dalla similitudine dei triangoli si ricava (B base maggiore, b base minore, h altezza)
$$\frac{b}{h} = \frac{h}{B}.$$
Risulta $B = 9$ m e $b = 4$ m. Dato che le diagonali sono perpendicolari il loro prodotto corrisponde al doppio dell'area del trapezio
$$D\cdot d = (B+b)h = 78\,\text{m}^2$$
La risposta è $\boxed{0078}$.

14. *Usa la Carta Riciclata.*
Un triangolo individuato da tre vertici del cubo o è rettangolo o è equilatero. Infatti si configurano solo due casi:

- due vertici appartengono allo stesso spigolo; in tal caso il terzo vertice
  - o appartiene a una delle facce che confluiscono in tale spigolo, e allora il triangolo è la *metà* di tale faccia,
  - o appartiene allo spigolo opposto, e in tal caso il triangolo è la *metà* del rettangolo formato dai due spigoli a da due diagonali delle facce.
- Se nessuna coppia di vertici appartiene ad uno stesso spigolo la sola possibilità è che il triangolo sia formato da tre diagonali delle facce, e dunque il triangolo è equilatero.

Fissato ora un vertice del triangolo, diciamo A, vi sono 7 possibilità per il vertice B e, fissato anche B, altre 6 possibilità per il terzo vertice C. I triangoli distinti sono di fatto la metà, in quanto per ogni scelta di B e C vi è la possibilità di scambiare tali vertici.

Dei 21 triangoli possibili, quelli formati da diagonali di facce sono solo 3. Infatti da A devono partire due lati, e possiamo sceglierli in 3 modi distinti decidendo quale delle 3 diagonali di facce escludere.

La probabilità cercata è dunque

$$\frac{21-3}{21} = \frac{6}{7}.$$

La risposta è $\boxed{0013}$

15. *Scegli Prodotti a km 0.*
La scomposizione di 2020 è $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$.
Dalla identità di Fibonacci

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

e dal fatto che $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $101 = 10^2 + 1^2$, si ricava $2020 = 16^2 + 42^2$ e $2020 = 24^2 + 38^2$.
Risposta $\boxed{0120}$.

16. *Usa lo Spazzolino in Bambù.*
Tracciati n cerchi massimi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sulla sfera, sia R_n il numero delle regioni (delimitate da archi di cerchio) in cui essi suddividono la sua superficie.

Ogni coppia di cerchi massimi distinti ha in comune due punti; così, se si traccia un altro cerchio massimo γ_{n+1}, su di esso gli n cerchi precedenti individuano $2n$ punti.

Dunque γ_{n+1}, è suddiviso dai punti suddetti in $2n$ archi, ciascuno dei quali separa una regione preesistente in due regioni distinte. In conclusione risulta

$$R_{n+1} = R_n + 2n.$$

Poiché $R_1 = 2$ si ricava facilmente $R_{10} = 92$.
Risposta $\boxed{0092}$.

17. *Usa la Borraccia.*
Risulta $\widehat{BEC} = \widehat{AED} = \widehat{BAD} = \theta$, così i triangoli CEB e BAD sono congruenti (LAL).

Perciò

- $\widehat{BCA} = \widehat{ABD} = \phi$,
- $\widehat{CBD} = \widehat{BDA} = \psi$,
- $BC = BD$.

La seconda uguaglianza implica che BC e AD sono paralleli e quindi risulta $\widehat{EAD} = \widehat{BCA} = \phi$.
Segue che i triangoli AED e CEB sono simili. Sia ora $\lambda = \frac{BC}{AD}$. Allora

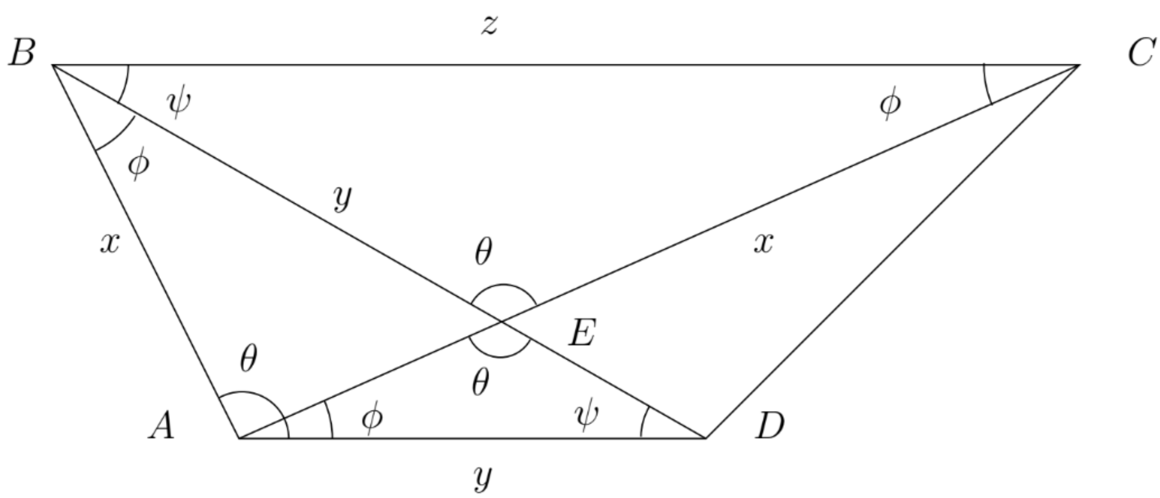
$$BC = \lambda \cdot AD = \lambda \cdot BE = \lambda^2 \cdot ED$$

e

$$BC = BD = BE + ED = (\lambda + 1)ED.$$

Quindi λ soddisfa l'equazione $\lambda^2 = \lambda + 1$ e perciò $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Risposta $\boxed{1618}$.



18. *No Cannucce di Plastica.*
Indichiamo con a e b i due amici, M la classe con m studenti e N la classe con n studenti. La probabilità che a e b siano entrambi in M è
$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$
Analogamente, la probabilità che i due amici risultino iscritti entrambi in N è
$$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$
La probabilità che A e B siano nella stessa classe è espressa dalla somma delle probabilità precedenti
$$\frac{m(m-1)+n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} = \frac{1}{2}.$$
Si perviene con semplici passaggi all'equazione
$$(m-n)^2 = m+n,$$
con m e n fra 20 e 30. Si deduce che $m+n$ deve essere un quadrato perfetto; l'unico quadrato perfetto tra 40 e 60 è 49. Quindi deve essere
$$\begin{cases} m+n = 49 \\ m-n = 7 \end{cases}$$
da cui $m = 28$, $n = 21$.
Risposta $\boxed{0588.}$

19. *Scegli Cosmetici e Detersivi Ecologici.*
Verificato che $(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)$ e congruo a 24 modulo 100 per ogni k intero calcoliamo le due cifre meno significative diverse da zero (utilizzando il simbolo $\equiv_{2d}$) e organizzando i calcoli come segue.

$$\begin{array}{lllllllllllllllllll}
2020! & \equiv_{2d} & (& 1 & \cdot & 2 & \cdot & 3 & \cdot & 4 &) & \cdot & (& 1 & \cdot & 5 &) & \cdot \\
 & \cdot & (& 6 & \cdot & 7 & \cdot & 8 & \cdot & 9 &) & \cdot & (& 2 & \cdot & 5 &) & \cdot \\
 & \cdot & (& 11 & \cdot & 12 & \cdot & 13 & \cdot & 14 &) & \cdot & (& 3 & \cdot & 5 &) & \cdot \\
 & \cdot & (& & & \cdots & & & & &) & \cdot & (& & \cdots & &) & \cdot \\
 & \cdot & (& 2016 & \cdot & 2017 & \cdot & 2018 & \cdot & 2019 &) & \cdot & (& 404 & \cdot & 5 &) & \cdot \\
 & & & & & & \downarrow\equiv_{2d} & & & &) & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & = & (& & & & 24^{404} & & & &) & \cdot & (& 404! & \cdot & 5^{404} &) &
\end{array}$$

Quindi
$$2020! \equiv_{2d} 24^{404} \cdot 5^{404} \cdot 404! \equiv_{2d} 12^{404} \cdot 10^{404} \cdot 404! \equiv_{2d} 12^{404} \cdot 404!$$

Si ricava anche
$$404! \equiv_{2d} 12^{80} \cdot 80! \cdot 401 \cdot 402 \cdot 403 \cdot 404 \qquad 80! \equiv_{2d} 12^{16} \cdot 16! \qquad 16! \equiv_{2d} 12^{3} \cdot 3! \cdot 16$$

ovvero

$$2020! \equiv_{2d} 12^{404+80+16+3} \cdot 3! \cdot 16 \cdot 401 \cdot 402 \cdot 403 \cdot 404 \equiv_{2d} 12^{503} \cdot 6 \cdot 16 \cdot 24.$$

Dato che $12^{20} \equiv_{2d} 76$ e $76^n \equiv_{2d} 76$, si ottiene $12^{503} \equiv_{2d} 12^3$.

Il valore cercato sarà dunque $2020! \equiv_{2d} 12^3 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 24 \equiv_{2d} 12$.
La risposta è $\boxed{0012}$.

20. *Non Esiste il Pianeta B.*
Poniamo

$$y = \frac{x^3+1}{2}$$

allora l'equazione data diventa

$$x = \frac{y^3+1}{2}$$

Dato che x e y sono espresse dalla medesima funzione e questa funzione è monotona crescente, si può concludere che

$$x = y$$

L'equazione ora diventa

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

e le soluzioni sono

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad x - 3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Il valore cercato risulta $1 + \sqrt{5}$.
Risposta $\boxed{0236}$.